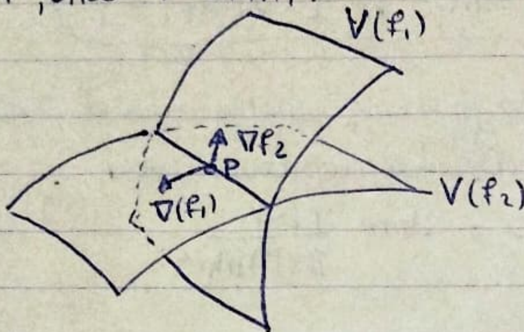
ΜΑΘΗΜΑ 9° 30/10

→ αφινικό σύνολο

Ορσ: Έστω $Y = V(f_1,\dots,f_r) \subseteq \mathbb{A}^n_k$. Το Y θα ονομάζεται μη ιδιόμορφο (non singular) στο $P \in Y$ αν η τάξη του Ιακωβιανού $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big|_P\right)_{ij}$ είναι $n-r$, όπου $r = \dim Y$.



δηλ. ζητάμε οι υπερεπιφάνειες οι $f_1,\dots,f_r$ να τέμνονται εγκάρσια στο $P \in Y$.
(δηλ. το grad να είναι γρ. ανεξ.)

Από Μεταθετική Άλγεβρα

Ορσ: Έστω R τοπικός δακτύλιος με μοναδικό μεγιστικό $m \trianglelefteq R$. Ο R θα ονομάζεται regular local ring αν $\dim m/m^2 = \dim R$.

έχει την έννοια του εφαπτόμενου χώρου

Θεώρημα: $Y \subseteq \mathbb{A}^n_k$ μη ιδιόμορφο στο $P \in Y \iff k[Y]_P$ regular local ring

→ τοπικοποίηση του δακτ. συντ. στο σημείο P

Απόδειξη:

Έστω $P = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{A}^n_k$ και $m_P = \langle x_1-\alpha_1,\dots,x_n-\alpha_n\rangle \trianglelefteq k[x_1,\dots,x_n]$ μεγιστικό

Ορίζουμε την
$$\partial : k[x_1,\dots,x_n] \longrightarrow k^n$$
$$f \longmapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_P,\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_P\right) = \nabla f(P)$$

Η παραπάνω απεικόνιση είναι γραμμική (ιδιότητες παραγώγου)

Παρατηρούμε ότι οι εικόνες των $x_1-\alpha_1,\dots,x_n-\alpha_n$ μας δίνουν μια βάση του k^n και $\partial(m_P^2)=0$

$$\frac{\partial(x_i-a_i)}{\partial x_j} = \delta_{ij}$$

μάλιστα αυτός είναι ο πυρήνας

$$m_P^2 = \langle (x_i-\alpha_i)\cdot(x_j-\alpha_j)\rangle$$

και
$$\frac{\partial}{\partial_k}(x_i-\alpha_i)(x_j-\alpha_j) = \begin{cases} 0 & k \notin \{i,j\} \\ x_j-\alpha_j & k=i \\ x_i-\alpha_i & k=j \end{cases}$$
μηδενίζονται στο σημείο P

Από γενίκευση του τύπου του Taylor σε μία μεταβλητή, αν $f \in \ker\partial$

$$f = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)(x-x_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0)(x-x_0)^2 \subseteq m^2$$

αν περιορίσουμε στο m ⟶ $f(x_0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = 0$

Αυτό γενικεύεται και σε πολλές μεταβλητές.

Από 1ο θ ισομορφισμού $m_p/m_p^2 \overset{\partial'}{\cong} k^n$

Έστω $I(Y) = \langle f_1,\dots,f_r\rangle \trianglelefteq k[x_1,\dots,x_n]$, τότε μπορεί κανείς να δει την τάξη του Ιακωβιανού ως τη διάσταση του $\partial(I(Y))$ ως υπόχωρο του k^n.

$$P\in Y \Rightarrow I(Y)\subseteq m_p \text{ ή, } P = V(m_p)\subseteq Y$$

Η συνάρτηση ∂, άρα και ο επαγόμενος ισομορφισμός ∂' είναι γραμμικές και άρα παίρνουμε ότι η τάξη του Ιακωβιανού είναι

$$\dim \frac{I(Y)+m_p^2}{m_p^2} = \dim \frac{I(Y)}{I(Y)\cap m_p^2} \quad 2^o \text{ θ ισομορφ.}$$

Από την άλλη έχουμε ότι

$$k[Y]_p = \left[k[x_1,\dots,x_n]/I(Y)\right]_p$$

και από την αντιστοιχία μεγιστικών ιδεωδών έχουμε ότι

$$m_p \longleftrightarrow m_p/I(Y) \trianglelefteq k[x_1,\dots,x_n]/I(Y) \qquad (m_p \supseteq I(Y))$$

$$\big\downarrow$$

$$m = \left(m_p/I(Y)\right)k[Y]_p$$ ιδεώδες στο localization που επιβιώνει

Δηλ. έχουμε

$$\begin{tikzcd} m_p \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\phi"'] & m = \frac{m_p}{I(Y)}k[Y]_p \arrow[r] & \frac{m}{m^2} \end{tikzcd}$$

και από θεωρία δακτυλίων $\ker\phi = I(Y) + m_p^2$

μηδενίζεται στο 1ο βελάκι — μηδενίζεται στο 2ο βελάκι

Άρα $m/m^2 \cong m_p/I(Y)+m_p \cong \dfrac{m_p/m_p^2}{I(Y)+m_p/m_p^2}$ 3ο θ Ισομορφισμού

Περί Ακρίβειας σε Ακολουθίες

$\cdots \to C_{i-1} \xrightarrow{\partial_i} C_i \xrightarrow{\partial_{i+1}} C_{i+1} \to \cdots$

ακρίβεια στη θέση i: $Im\,\partial_i = \ker\partial_{i+1}$

βραχεία ακριβής ακολουθία (β.α.α)

$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} C \to 0$

i: 1-1 και $Im\, i = \ker\pi$

π: επί

Γνωστή β.α.α

$0 \to N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/N \to 0$

Έχουμε την β.α.α:

$$0 \to \underbrace{\frac{I(Y)+m_p}{m_p^2}}_{\substack{\text{εικόνα του Jacobian}\\ \text{rank} = n-r}} \xrightarrow{i} \underbrace{\frac{m_p}{m_p^2}}_{k^n} \xrightarrow{\pi} \underbrace{\frac{m_p}{I(Y)+m_p}}_{m/m^2} \to 0$$

Και παίρνουμε την εξής σχέση για τις διαστάσεις

$$\dim\frac{m_p}{m_p^2} = \dim\frac{I(Y)+m_p}{m_p^2} + \dim\frac{m_p}{I(Y)+m_p}$$

$$\Rightarrow n = \dim\frac{m}{m^2} + n - r \Rightarrow \dim\frac{m}{m^2} = r$$

Εφαπτόμενος Χώρος

→ Θα μπορούσαμε να πούμε ότι αποτελείται από τους $Hom_k(m/m^2, k)$ δηλ. είναι ο δυϊκός του m/m^2.

→ Στο m/m^2 έχει νόημα ο πολ/μος ενός $\alpha \bmod m$ με ένα $b \bmod m^2$ ($b \in m^2$)

$k = R/m \longrightarrow m/m^2$

Για $\mu \in m$ $\quad \alpha \equiv \alpha+\mu \bmod m$

$(\alpha+\mu)\cdot\beta = \alpha\cdot\beta + \underbrace{\mu\cdot\beta}_{\in m^2}$

Άρα $(\alpha+\mu)\cdot\beta \equiv \alpha\beta \bmod m^2$

↳ ανεξάρτητο της επιλογής αντιπροσώπου

θα τα ξαναδούμε αργότερα, τώρα δεν ξέρουμε αρκετά πράγματα

Ορ: Έστω $F(x_1,\dots,x_n) = F_0 + F_1 + \dots + F_m$ (ανάλυση σε ομογενή) ένα πολυώνυμο και F_* ο μικρότερος (σε βαθμό) μη μηδενικός ομογενής όρος. Ονομάζουμε γεωμετρικό κώνο της F στο $(0,\dots,0)$ το $V(F_*)$ και την $\deg F_*$ πολλαπλότητα της ιδιομορφίας

ΙΔΕΑ: κοντά στο 0 ο κυρίαρχος όρος είναι αυτός με τον μικρότερο βαθμό.

πχ 1) $V(\underbrace{x^3}_{\text{ομογενές deg 3}} + \underbrace{x^2 - y^2}_{\text{ομογενές deg 2}})$ μία επίπεδη αλγεβρική καμπύλη

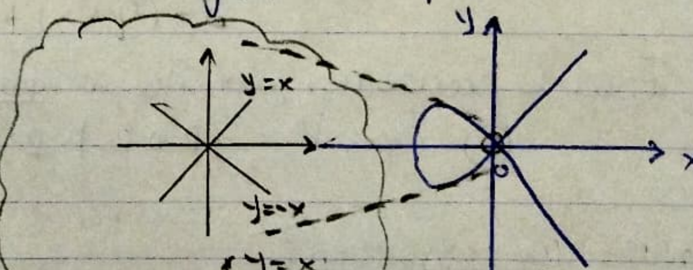
$y^2 = x^3 + x^2$

$F_* = x^2 - y^2$

$\nabla f(x,y) = (3x^2-2x, -2y)$

↳ $\nabla f(0,0) = (0,0)$ ιδιομορφία

βαθμός ιδιομορφίας = 2



$y^2 = x^2 \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ y = -x \end{cases}$

→ τι βλέπω κοντά στο 0

(*) Σε ένα μη ιδιόμορφο σημείο θα είχαμε μία απλή εφαπτόμενη ευθεία.

$I = \langle f_1,\dots,f_r\rangle \longrightarrow I^* = \langle f_1^*,\dots,f_r^*\rangle$

$\longrightarrow V(I^*)$ εφαπτόμενος χώρος

→ Αν $f^* = \sum_{v=0}^{d} a_v x^v y^{d-v}$ ομογενές βαθμού d, τότε γράφουμε

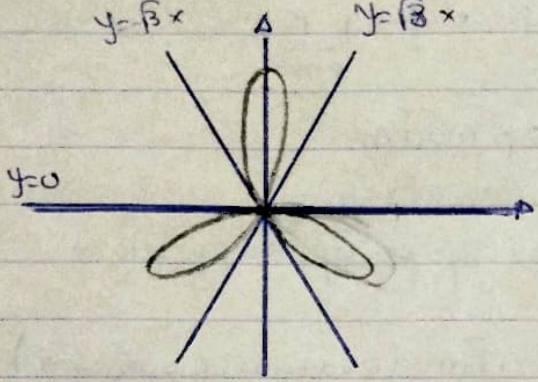
$$f^* = y^d \sum_{v=0}^{d} a_v \left(\frac{x}{y}\right)^v = y^d a_0 \prod_{v=1}^{d}\left(\frac{x}{y}-\lambda_v\right) = a_0 \prod_{v=1}^{d}(x-\lambda_v y)$$

Πχ (2) $F(x,y) = \underbrace{(x^2+y^2)^2}_{\deg 4} + \underbrace{3x^2y - y^3}_{\deg 3}$

$y^3 - 3x^2y = 0$

$y(y^2-3x^2)=0$

$y=0$ ή $y=\sqrt{3}x$ ή $y=-\sqrt{3}x$



Κεφ 4 : ΣΧΗΜΑΤΑ

ΙΔΕΑ: Απο ενα Γεωμετρικο Αντικείμενο ⟶ Δακτύλιο Συναρτήσεων (πεπερ παραγ k-άλγεβρα)

Αντίστροφα, ξεκινάω ενα Commutative Noetherian Ring με 1 και βρίσκω το γεωμ αντικείμενο που περιγράφει

Ορσ: Έστω R δακτύλιος, ονομάζουμε φάσμα του R το σύνολο

$$\operatorname{Spec} R = \{ P \trianglelefteq R \mid P : \text{πρώτο} \}$$

Γιατί πρώτα και όχι μεγιστικά?

$R \xrightarrow{\phi} S$

$R \trianglerighteq \phi^{-1}(P) \longleftarrow P \trianglelefteq S$ πρωτο
πρωτο

ΣΤΑ ΜΕΓΙΣΤΙΚΑ ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ ΚΑΤΑ ΚΑΝΟΝΑ $\phi^{-1}(m)$ ΜΕΓΙΣΤΙΚΟ?

Εκ. ορίζεται $R/\phi^{-1}(P) \xrightarrow{\bar{\phi}} S/P$ που ειναι καλα ορσ. 1-1 απεικονιση
ακ περ — ακ περ

(*) Αντιστοιχούμε στο $\operatorname{Spec} R$ τα σημεία του γεωμετρικού αντικειμένου που περιγράφει ο δακτύλιος R.

$$(R, \quad \operatorname{Spec} R)$$

απεικονίσεις στα σημεία ↳ σημεία

Αν $f \in R$ και $P \in \operatorname{Spec} R$, τότε μπορούμε να ορίσουμε

$$f(P) = f \bmod P$$

[πχ. $f(x_1, \dots, x_n)$ και $P = \langle x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n \rangle \Rightarrow f(P) = f \bmod P = f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$]

πχ| $10 \in \mathbb{Z}$ και $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$:

0
$2\mathbb{Z}$
$3\mathbb{Z}$
$5\mathbb{Z}$
$7\mathbb{Z}$
$11\mathbb{Z}$

$\longrightarrow$

$10(5\mathbb{Z}) = 10 \bmod 5 \to$ στο $\mathbb{F}_5$

$10(11\mathbb{Z}) = 10 \bmod 11 \to$ στο $\mathbb{F}_{11}$

οι τιμές είναι σε διαφορετικά σώματα (γενικά σε διαφορετικές ακ. περ. R/P)

(*) Οι συναρτήσεις των κλασσικών varieties ζουν στο ίδιο σώμα, εδώ δεν έχουμε κάτι τέτοιο.
Όταν τα πρώτα ιδεώδη μπαίνουν στο παιχνίδι έχουμε περισσότερα στοιχεία

κλασσικό variety

πχ| $f(x,y) \in k[x,y]$ και $P = \langle (x^2 + y^2 - 1) \rangle$, τότε

$f(P) \longrightarrow$ η τιμή του f στο δακτύλιο συναρτήσεων του κύκλου (βρισκόμαστε στο k)

Τοπολογία Zariski στο $\operatorname{Spec} R$

Έστω R δακτύλιος και $I \trianglelefteq R$, ορίζουμε

$$V(I) = \{ P \in \operatorname{Spec} R \mid I \subseteq P \}$$ → θα είναι τα κλειστά σύνολα

Πρόταση: Έστω $I, J, I_\lambda \trianglelefteq R$ με $\lambda \in \Lambda$, τότε ισχύουν τα παρακάτω

1. $V(\langle 0 \rangle) = \operatorname{Spec} R$ και $V(R) = \emptyset$
2. $V(I) \cup V(J) = V(I \cap J)$
3. $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} V(I_\lambda) = V\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda\right)$.

Απόδειξη:

1. Προφανώς $\langle 0\rangle \subseteq P \ \forall P\in \operatorname{Spec}R \Rightarrow V(\langle 0\rangle)=\operatorname{Spec}R$

αν $R\subseteq P$ για $P\in\operatorname{Spec}R \Rightarrow R=P$ όχι πρώτο (εξ ορισ.) $\Rightarrow V(R)=\emptyset$

2. $P\in V(I) \Leftrightarrow I\subseteq P$

$P\in V(J) \Leftrightarrow J\subseteq P$ $\Rightarrow I\cap J\subseteq P \Rightarrow P\in V(I\cap J)$

$\Rightarrow V(I\cap J)\supseteq V(I)\cup V(J)$

Από την άλλη

$P\in V(I\cap J) \Leftrightarrow I\cap J\subseteq P$ αν $I\subseteq P \Rightarrow P\in V(I)$

αν $I\not\subseteq P$, τότε $\exists f\in I$ τω $f\notin P$

έστω $g\in J$, τότε $fg\in I\cap J\subseteq P$, $f\notin P$ $\xrightarrow{P \text{ πρώτο}}$ $g\in P \ \forall g\in J$

$\Rightarrow J\subseteq P \Rightarrow P\in V(J)$

3. Έστω $P\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda) \Leftrightarrow P\in V(I_\lambda)\ \forall\lambda\in\Lambda$

$\Leftrightarrow I_\lambda\subseteq P \ \forall\lambda\in\Lambda$

$\Leftrightarrow \sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\subseteq P$

$\Leftrightarrow P\in V(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda)$ ∎

Τα ανοικτά της τοπολογίας ορίζονται από τα

$$D(I)=V(I)^c=\{P\in\operatorname{Spec}R \mid I\not\subseteq P\}$$

Ορίζουμε $\mathcal{O}=\{D(I)\mid I\trianglelefteq R\}$ την τοπολογία Zariski του Spec R

που ικανοποιεί : * $\emptyset, \operatorname{Spec}R\in\mathcal{O}$

* $U_1,U_2\in\mathcal{O}\Rightarrow U_1\cup U_2\in\mathcal{O}$

* $U_\lambda\in\mathcal{O}$ $\lambda\in\Lambda \Rightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda\in\mathcal{O}$

Ακόμη, για $f\in R$ ορίζουμε: $D(f)=\{P\in\operatorname{Spec}R \mid f\notin P\}$ βασικά ανοικτά για το Σ

$V(f)=\{P\in\operatorname{Spec}R\mid f\in P\}$ υπερεπιφάνεια του f

Πρόταση: Έστω $I\trianglelefteq R$, καθώς R Noether $I=\langle f_1,\dots,f_r\rangle$ και τότε

$D(I)=D(f_1,\dots,f_r)=D(f_1)\cup\dots\cup D(f_r)$ ή $D(I)=\bigcup_{f\in I}D(f)$.

Απόδειξη:

$f\in I$: αν $f\notin P \Rightarrow I\not\subseteq P \Rightarrow D(f)\subseteq D(I) \Rightarrow \bigcup_{f\in I}D(f)\subseteq D(I)$

Αντίστροφα, $P\in D(I)\Rightarrow I\not\subseteq P\Rightarrow \exists f\in I$ τω $f\notin P \Rightarrow P\in D(f)\Rightarrow D(I)\subseteq D(f)$ ∎

ΜΑΘΗΜΑ 10ο 04/11

Πρόταση: Έστω $f \in R$, τότε $\mathcal{D}(f) = \emptyset \Leftrightarrow f$ μηδενοδύναμο ($f^n = 0$ ή $f \in \sqrt{0}$)

Απόδειξη:

$\mathcal{D}(f) = \emptyset \Leftrightarrow f \in P \ \forall P \in \operatorname{Spec} R$

Θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα από τη ΜΑ:

$$nil(R) = \sqrt{\langle 0_R \rangle} = \bigcap_{P \trianglelefteq R \text{ πρώτο}} P$$

και το αποτέλεσμα προκύπτει τετριμμένα.

($\subseteq$) Έστω $h \in nil(R) \Rightarrow h^n = 0$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow h^n \in P \ \forall P$ πρώτο

$\Rightarrow h \in P \ \forall P$ πρώτο

$\Rightarrow h \in \bigcap_{P \trianglelefteq R \text{ πρώτο}} P$

($\supseteq$) Έστω $x \in \bigcap_{P \trianglelefteq R \text{ πρώτο}} P$ και $x \notin nil(R)$ ($\Leftrightarrow x^n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$).

Θεωρούμε $S = \{\alpha \trianglelefteq R \mid x^n \notin \alpha \ \forall n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$ καθώς $\langle 0 \rangle \in S$

Ο R είναι της Noether και άρα ο S περιέχει μεγιστικό στοιχείο q.

Θδο q: πρώτο, καταλήγοντας σε άτοπο.

Έστω q όχι πρώτο, τότε $\exists a, b \in R$ τω $ab \in q$ και $a, b \notin q$, τότε $\langle q, \alpha \rangle$, $\langle q, b \rangle \notin S$ καθώς q μεγιστικό στο S

Άρα, $\exists n_a, n_b \in \mathbb{N}$ τω $x^{n_a} \in \langle q, \alpha \rangle$ και $x^{n_b} \in \langle q, b \rangle$

$\Rightarrow \exists c_a, c_b \in R \ \exists q_a, q_b \in q$ τω $x^{n_a} = c_a a + q_\alpha$, $x^{n_b} = c_b b + q_b$

$\Rightarrow x^{n_a + n_b} = x^{n_a} x^{n_b} = (c_a a + q_\alpha)(c_b b + q_b)$

$$= c_a c_b \underbrace{ab}_{\in q} + c_a \underbrace{a q_b}_{\in q} + c_b \underbrace{b q_\alpha}_{\in q} + \underbrace{q_\alpha q_b}_{\in q} \in q$$

Άτοπο, καθώς $q \in S$. ∎

<u>Συμβολίζουμε</u>: Έστω $X \neq \emptyset$ και $\Sigma \subseteq X$, τότε συμβολίζουμε $\overline{\Sigma}$ το μικρότερο κλειστό σύνολο που περ το Σ ή $\overline{\Sigma} = \bigcap \{F \subseteq X \mid F$ κλειστό, $\Sigma \subseteq F\}$

<u>πχ</u>) $\operatorname{Spec} \mathbb{Z} = \{\langle 0 \rangle, \langle 2 \rangle, \langle 3 \rangle, \langle 5 \rangle, \ldots\} = \{\langle 0 \rangle\} \cup \{\langle p \rangle \mid p \in \mathbb{Z}$ πρώτο$\}$

$V(0) = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, δηλ $\langle 0 \rangle \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ και $\overline{\langle 0 \rangle} = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$

Σε ένα τυχαίο κλειστό σύνολο $\quad I \trianglelefteq \mathbb{Z} \to I = n\mathbb{Z}$

$$V(I) = V(n\mathbb{Z}) = \{P \in \operatorname{Spec}\mathbb{Z} \mid n\mathbb{Z} \subseteq P\}$$
$$= \{p\mathbb{Z} \in \operatorname{Spec}\mathbb{Z} \mid p \mid n\}$$
$$= \{p\mathbb{Z} \in \operatorname{Spec}\mathbb{Z} \mid p \mid p_1^{a_1}\cdots p_k^{a_k}\}$$
$$= \{p_1\mathbb{Z}, \dots, p_k\mathbb{Z}\}$$

$n\mathbb{Z} \subseteq P = p\mathbb{Z}$
$\Leftrightarrow p \mid n$
Σ διατάξεις

και $D(I) = \operatorname{Spec}\mathbb{Z} \setminus \{p_1\mathbb{Z}, \dots, p_k\mathbb{Z}\}$.

$$V(n\mathbb{Z}) = V(\sqrt{n\mathbb{Z}}) = V(p_1\cdots p_k\mathbb{Z})$$

Ορ: Αν $\mathfrak{a} \in \operatorname{Spec}R$ με $\bar{\mathfrak{a}} = X$, τότε το $\mathfrak{a}$ λέγεται generic point.

πχ| Την ίδια ιστορία μπορούμε να κάνουμε και πιο γενικά για k αλγ κλειστό $\quad \operatorname{Spec}k[x] = \{\langle 0\rangle\} \cup \{\langle x-a\rangle \mid a \in k\}$

δηλ. είναι το $\mathbb{A}^1_k$ μαζί με ένα επιπρόσθετο generic pt.

$\mathbb{A}^1_k$ 

Μοιάζει πολύ με το $\mathbb{Z}$, με μια μεγάλη διαφορά

$\exists$ σώμα k τω $\forall\, p \trianglelefteq k[x]$ πρώτο $\quad k \hookrightarrow k[x]/p$

ενώ $\nexists$ κοινό υπόσωμα των $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

(*) Αν k όχι αλγεβρικά κλειστό, τότε
$$\operatorname{Spec}k[x] = \{\langle 0\rangle\} \cup \{\langle f\rangle \mid f \in k[x] \text{ ανάγωγο}\}$$
δηλ.

$$\langle x^2-2\rangle \in \operatorname{Spec}\mathbb{Q}[x]$$
$$\downarrow$$
$$\langle x-\sqrt{2}\rangle\ \langle x+\sqrt{2}\rangle \text{ στο } \operatorname{Spec}\bar{\mathbb{Q}}[x]$$

Μπορεί κανείς να δει το $\operatorname{Spec}\mathbb{Q}[x]$ ως τροχιές της δράσης της $\operatorname{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ στο $\operatorname{Spec}\bar{\mathbb{Q}}[x]$.

Ιστορικό Διάλειμμα :

Το 1950 ο Weil είχε μια αλγεβρική ιδέα την οποία έγραψε με καλύτερη γλώσσα ο Grothendieck το Σχήμα (Scheme)

Σκοπός ήταν η γενίκευση της Α.Γ. που κάνανε μέχρι τότε στο $\mathbb{C}$ ή $\overline{\mathbb{R}}$ σε σώματα k όχι αλγ. κλειστά, αλλά και δακτυλίους όπως ο $\mathbb{Z}[x]$.
Δηλ. να πάρουμε $I \trianglelefteq \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ και να ορίσω

$$V(I) = \{P = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n \mid f(P) = 0 \ \forall f \in I\}$$

Κανείς μπορεί να χρησιμοποιήσει τέτοιες ιδέες για να μελετήσει διοφαντικές εξισώσεις

Έχουμε $\dim k[x] = 1$
$\dim k[x,y] = \dim k[x][y] = 2$
θα περίμενε κανείς το ίδιο να κάνει και το $\mathbb{Z}[y]$

$\Pi K I \rightarrow$ θέλω διαίρεση με πηλίκο και υπόλοιπο
$\downarrow$
σε ακ. περ. θέλω μεγιστοβάθμιο όρο με αντιστρ. συντελεστή

Πρώτα Ιδεώδη του $\mathbb{Z}[x]$

Έστω $P \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x]$ $\quad \hookrightarrow$ η τομή με υποδακτύλιο δίνει πρώτο ιδεώδη

<u>1η Περ</u>: $P \cap \mathbb{Z} \neq \{0\} \Rightarrow P \cap \mathbb{Z} = \langle p \rangle$

$$\Phi : \mathbb{Z}[x] \xrightarrow{\text{επί}} \mathbb{F}_p(x)$$
$$f(x) \longmapsto f \bmod p$$

Έχουμε $\Phi(P) := \tilde{p} \trianglelefteq \mathbb{F}_p(x)$, όρα υπάρχει ισομορφισμός

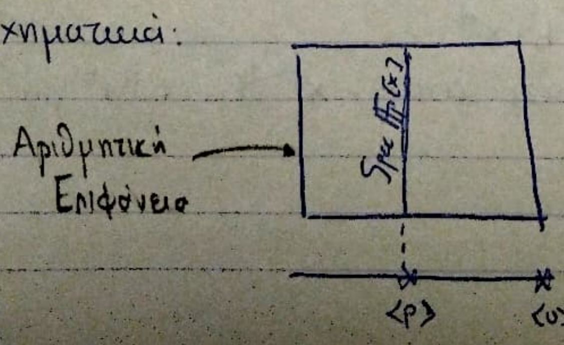
$$\mathbb{Z}[x]/P \longrightarrow \mathbb{F}_p[x]/\tilde{p}$$

Αν P: πρώτο, τότε $\mathbb{Z}[x]/P$: ακ περ $\Rightarrow \mathbb{F}_p[x]/\tilde{p}$ ακ. περ.
Μάλιστα, $\exists\, g \in \mathbb{F}_p[x]$ ανάγωγο τω $\tilde{p} = \langle g(x) \rangle$ $\qquad f_1 \equiv f \bmod p$
Επιλέγουμε $f \in \mathbb{Z}[x]$ τω $\Phi(f) = g$ και τότε $P = \langle p, f(x) \rangle = \underset{\text{όχι κύριο}}{\langle f_1(x), p \rangle}$

$$g(x) = f(x) \bmod p$$

Σε αυτή την περίπτωση $V(\langle p \rangle) = \operatorname{Spec} \mathbb{F}_p(x)$
$$\| $$
$$\{P \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x] \mid p\mathbb{Z} \subseteq P\}$$

Σχηματικά:



$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x] & & P & & \mathbb{Z}[x] \\ \Big\downarrow i^{\#} & & \Big\downarrow & & \Big\uparrow i \\ \operatorname{Spec} \mathbb{Z} & & i^{\#}(P) = i^{-1}(P) = P \cap \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} \end{array}$$

$2^η$ Πρ. $I \cap \mathbb{Z} = \{0\}$ τα μη μηδενικά στοιχεία του I αποτελούνται από πολυώνυμα με ακ. συντελεστές

Έστω $d_0 :=$ ο μικρότερος βαθμός πολυωνύμων στο I.
Για $d \geq d_0$ ορίζουμε
$$P_d = \{h \in I \mid \deg h = d\} \neq \phi$$
Έστω $h \in P_d \Rightarrow nh \in P_d$ και συγκεκριμένα $-h \in P_d$
Αν $f(x) \in P_{d_0}$ τω $f(x) = a_{d_0}x^{d_0} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ με a_{d_0} το μικρότερο δυνατό.

Ισχ1: Τα στοιχεία του P_{d_0} είναι πολ/σια του $f(x)$
↳ Έστω $g(x) \in P_{d_0} \Rightarrow g(x) = b_{d_0} x^{d_0} + \dots + b_1 x + b_0$, όπου $b_{d_0} > 0$.
Θεωρούμε $c = \gcd(\alpha_{d_0}, b_{d_0})$, τότε $\exists m, n \in \mathbb{Z}$ τω
$$c = m a_{d_0} + n b_{d_0} \qquad 1 \leq c \leq a_{d_0}$$
Έχουμε $mf(x) + ng(x) \in P_{d_0} \Rightarrow$ ο συντελεστής του x^{d_0} θα είναι c.
Από το ελάχιστο του a_{d_0} παίρνουμε ότι $c = a_{d_0} \Rightarrow a_{d_0} \mid b_{d_0}$
Έστω $g(x) \neq \frac{b_{d_0}}{\alpha_{d_0}} f(x)$, τότε $g(x) - \frac{b_{d_0}}{\alpha_{d_0}} f(x) \in I$ με βαθμό $< d_0$ άτοπο.

Παρατηρήσεις:
1) $\delta = \gcd(\alpha_{d_0}, \dots, \alpha_1, \alpha_0) = 1$ (αν δεν ήταν $\frac{f(x)}{\delta} \in P_{d_0}$ με μικρότερο συντελεστή)
2) $f(x)$ = ανάγωγο (αν $f(x) = g_1(x) g_2(x) \Rightarrow g_1(x) \in I$ ή $g_2(x) \in I$ από το ελάχιστο του βαθμού έχουμε το ζητούμενο)

Ισχ2: $I = \langle f(x) \rangle$.
↳ Έστω $g(x) = c_{d_0} x^{d_0} + \dots + c_1 x + c_0$ και $b_0 = \gcd(\alpha_{d_0}, c_{d_0})$.
Αν $b_0 \neq a_{d_0}$, τότε $\exists m_0, n_0 \in \mathbb{Z}$ με $b_0 = m_0 \alpha_{d_0} + n_0 c_{d_0}$, τότε
$$h(x) = m_0 x^{d-d_0} f(x) + n_0 g(x) \in P_d$$
↳ πυκνή κατασκευή: ρουκνίζω τους μεγιστοβάθμιους με μεγιστοβάθμιο όρο του h τον $b_0 x^d$
Θέτουμε $\alpha_{d_0} = \alpha \cdot b_0$ $(b_0 \mid \alpha_{d_0})$, τότε $a h(x) - x^{d-d_0} f(x) \in P_{d'}$ για $d' < d$
Επαγωγικά δδο $\langle f(x) \rangle \cap P_d = P_d$

Για $d=d_0$ το έχουμε δείξει
Έστω ότι για $d'<d$: $\langle f(x)\rangle \cap P_{d'} = P_{d'}$, θδο ισχύει για d.
Από επαγωγική υπόθεση $ah(x) \in \langle f(x)\rangle$
Προφανώς, $a \notin \langle f(x)\rangle$ και $a \notin P$ $(P\cap\mathbb{Z}=\{0\})$
Καθώς f ανάγωγο $\Rightarrow$ $\langle f(x)\rangle$: πρώτο
$ah(x) \in \langle f(x)\rangle$
$a \notin \langle f(x)\rangle$ $\Bigg| \rightarrow h(x) \in \langle f(x)\rangle$

Άρα, $g(x) = h(x) - m_0 x^{d-d_0} f(x) \in \langle f(x)\rangle$.

Συνεπώς, $\langle f(x)\rangle = P$
Από το Λήμμα Gauss, $\langle f(x)\rangle \trianglelefteq \mathbb{Z}[x]$ πρώτο $\Leftrightarrow$ $\underline{\langle f(x)\rangle \trianglelefteq \mathbb{Q}[x] \text{ πρώτο}}$
Άρα, έχουμε φυσιολογική εμφύτευση

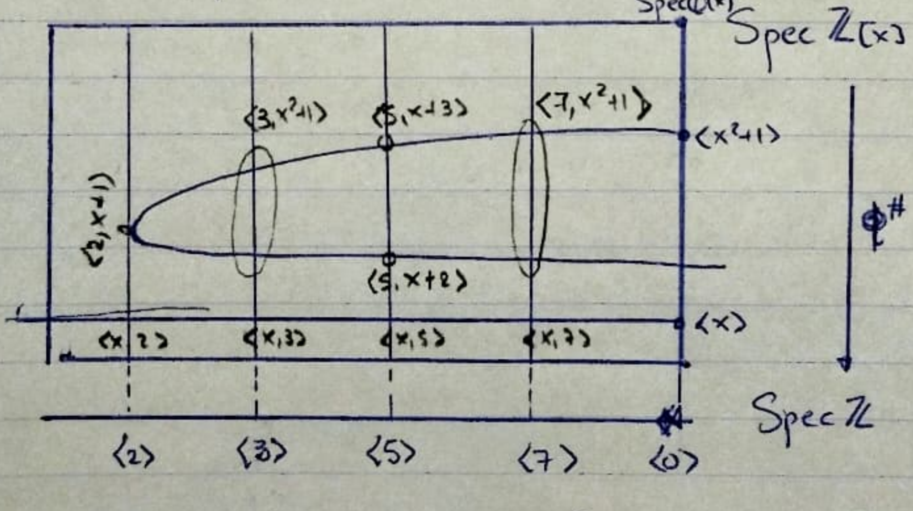
$$\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}[x]$$
$$\rightarrow \phi^{\#} : \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[x] \longrightarrow \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$$
$$P \longmapsto \phi^{-1}(P) = P\cap\mathbb{Z}$$

και τελικά

$$(\phi^{\#})^{-1}(\langle p\rangle) = \operatorname{Spec}\mathbb{F}_p[x] \quad \text{και} \quad (\phi^{\#})^{-1}(\langle 0\rangle) = \operatorname{Spec}\mathbb{Q}[x]$$

Δηλ.

$$\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[x] \cong \left(\bigcup_{p \text{ πρώτος}} \operatorname{Spec}\mathbb{F}_p[x]\right) \cup \operatorname{Spec}\mathbb{Q}[x].$$



$\langle p, x^2-\alpha\rangle \longrightarrow x^2-\alpha \Rightarrow \begin{cases} \text{δεν διασπάται} : x^2 \equiv \alpha \bmod p \text{ έχει λύση} \\ \text{διασπάται} : x^2 \equiv \alpha \bmod p \text{ δεν έχει λύση} \end{cases}$

Πρόταση: Έστω $\phi: R \to S$ ομομορφ. δακτυλίων και $\phi^{\#}: \operatorname{Spec} S \to \operatorname{Spec} R$, τότε η $\phi^{\#}$ είναι συνεχής στην τοπολογία Zariski.

Απόδειξη:

Θα δείξουμε ότι αντιστρέφει κλειστά σε κλειστά.

$$
\begin{aligned}
(\phi^{\#})^{-1}(V_R(I)) &= \{Q \in \operatorname{Spec} S \mid \phi^{\#}(Q) \in V_R(I)\} \\
&= \{Q \in \operatorname{Spec} S \mid \phi^{-1}(Q) \in V_R(I)\} \\
&= \{Q \in \operatorname{Spec} S \mid I \subseteq \phi^{-1}(Q)\} \\
&= \{Q \in \operatorname{Spec} S \mid \phi(I) \subseteq Q\} \\
&= V_S(\phi(I)) \text{ κλειστό.}
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

ΜΑΘΗΜΑ 11° 06/11

Υπενθύμιση: Έχω τις εξής αντιστοιχίες ιδεωδών

$J \trianglelefteq R$ με $I \subseteq J \longleftrightarrow J' \trianglelefteq R/I$

$J \trianglelefteq R$ με $J \cap S = \emptyset \longleftrightarrow J' \trianglelefteq S^{-1}R$

Στόχος: Θέλουμε να ορίσουμε sheaves (δράγματα) → ενισχύσεις το κολλήσιον ανεμισίμενο

πχ. αν $U \subseteq X$ ανοικτό, θέλω να ορίσω το

$$\mathcal{O}_X(U) = \{\text{κανονικές συναρτήσεις στο } U\}$$

- Έχαμε ότι στο Spec R, οι κανονικές συναρτήσεις είναι το R.

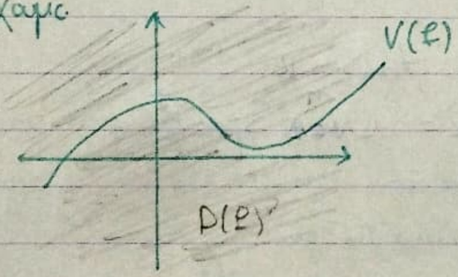
Ορίσαμε $D(f) = \{P \in \operatorname{Spec} R \mid f \notin P\}$

$V(f) = \{P \in \operatorname{Spec} R \mid f \in P\} = D(f)^c = V(\langle f \rangle)$ υπερεπιφάνεια

Αν συμβολίσαμε $X = \operatorname{Spec} R$, τότε ορίζουμε $X_f := D(f)$

Το ανοικτό σύνολο που δεν περιέχει τον μηδενισμό του f

Γεωμετρικά έχουμε



- Υπενθ: Στον εντοπισμό συνήθως έχω 2 σύνολα

  * $S = R \setminus P$, όπου $P \trianglelefteq R$ πρώτο $(S^{-1}R = R_P)$

    πχ R ακ περ και $\langle 0 \rangle \trianglelefteq R \Rightarrow S^{-1}R = \mathrm{Quot}(R)$ το σώμα πηλίκων

  * $S = \{f^m \mid m \in \mathbb{N}\}$, όπου f όχι μηδενοδύναμο $(S^{-1}R = R_f)$

    εξ ορισμού θέλω $0 \notin S$

Παρατήρηση: $\operatorname{Spec} R_f = D(f) = \{P \in \operatorname{Spec} R \mid P \cap S = \emptyset\}$

$\Updownarrow$ $f \notin P$

(*) Δηλ. μπορεί κανείς να βλέπει τα $D(f)$ ως φάσμα κάποιου εντοπισμού

- Πρόταση: Έστω $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ στοιχεία του δακτυλίου R, τότε

$$\operatorname{Spec} R = \bigcup_{\alpha \in A} \operatorname{Spec} R_{f_\alpha} \iff \langle f_\alpha \rangle_{\alpha \in A} = R$$

Αυτό οι γεωμέτρες θα το λέγανε διαμέριση της μονάδας

Απόδειξη:

Έστω $\operatorname{Spec} R = \bigcup_{\alpha\in A} \operatorname{Spec} R_{f_\alpha}$, δηλ. αν $P \trianglelefteq R$ πρώτο, τότε
$\exists \alpha\in A$ τω $P \in \operatorname{Spec} R_{f_\alpha} = D(f_\alpha) \Rightarrow f_\alpha \notin P_\alpha$

Άρα $\nexists P \in \operatorname{Spec} R$ τω $f_\alpha \in P$ $\forall \alpha\in A \Rightarrow$ το $\langle f_\alpha\rangle$ δεν περιέχεται σε μεγιστικό
$\Rightarrow \langle f_\alpha\rangle = R$.

Αντίστροφα, αν $\langle f_\alpha\rangle_{\alpha\in A} = R$, τότε
$\forall P \in \operatorname{Spec} A$ $\exists \alpha\in A$ τω $f_\alpha \notin P \Rightarrow P \in \operatorname{Spec} R_{f_\alpha}$
$\Rightarrow \operatorname{Spec} R \subseteq \bigcup_{\alpha\in A} \operatorname{Spec} R_{f_\alpha} \subseteq \operatorname{Spec} R$
$\Rightarrow \operatorname{Spec} R = \bigcup_{\alpha\in A} \operatorname{Spec} R_{f_\alpha}$ ∎

Πόρισμα: Ο τοπολογικός χώρος $X = \operatorname{Spec} R$ είναι semicompact.

Γαλλική Σχολή: Συμπαγής = ημισυμπαγής + Hausdorff

κάθε ανοικτό κάλυμμα έχει πεπερ. υποκάλυμμα

Απόδειξη:

Έστω $\langle f_\alpha\rangle_{\alpha\in A} = R \overset{R\,\text{Noether}}{\Longleftrightarrow} \langle f_{\alpha_1},\dots,f_{\alpha_m}\rangle = R$
$\Leftrightarrow \operatorname{Spec} R = \bigcup_{i=1}^{m} \operatorname{Spec} R_{f_{\alpha_i}}$ → κάθε $D(f)$ γράφεται ως $\operatorname{Spec} R_f$ άρα κάθε κάλυμμα δέχεται πεπερ. υποκάλυμμα

μπορώ να παραλείψω τη συνθήκη Noether μέσω της σχέσης $1 = r_1 f_{\alpha_1} + \dots + r_m f_{\alpha_m}$
$\Rightarrow r = (r\cdot r_1) f_{\alpha_1} + \dots + (r r_m) f_{\alpha_m}$ ∎

Λήμμα: Έστω $X = \operatorname{Spec} R$, τότε για $f, g \in R$ έχουμε ότι
1. $X_f \cap X_g = X_{fg}$
2. $X_f \supseteq X_g \Leftrightarrow g \in \sqrt{\langle f\rangle}$

Απόδειξη:

1. Έστω $P \in X_f \cap X_g \Leftrightarrow f \notin P$ και $g \notin P \overset{P\ \text{πρώτο}}{\underset{\text{ορ. ιδεώδους}}{\Longleftrightarrow}} fg \notin P \Leftrightarrow P \in X_{fg}$

2. όμοια με προηγ. μάθημα $\sqrt{\langle f\rangle} = \bigcap_{\substack{P \in \operatorname{Spec} R\\ f \in P}} P$

μπορούμε να ισχυριστούμε $\sqrt{\langle 0_{R/\langle f\rangle}\rangle} = \bigcap_{P \in \operatorname{Spec} R/\langle f\rangle} P = \bigcap_{\substack{P\in \operatorname{Spec} R\\ f \in P}} P$

$g \notin \sqrt{\langle f\rangle} \Leftrightarrow \exists P \in \operatorname{Spec} R : f \in P$ και $g \notin P \Leftrightarrow P \in X_g$ και $P \notin X_f \Leftrightarrow X_f \not\supseteq X_g$

Άρα αντιθετοαντίστροφα $X_f \supseteq X_g \Leftrightarrow g \in \sqrt{\langle f\rangle}$. ∎

SHEAVES

Ιστορική Αναδρομή: ξεκίνησαν από τη μιγαδική ανάλυση με σκοπό να "κολλήσουμε" πράγματα που δεν "κολλάνε" και εμφανίζεται σε ισότητα συναρτήσεων

Ορσ: Έστω X τοπ. χώρος, τότε σε κάθε $U \subseteq X$ ορίζουμε section στο U

$\overset{\text{presheaf}}{\mathcal{F}}: U \longrightarrow \mathcal{F}(U)$ ~~σε συναρτήσεις~~ (εφοδιάζει το U με δομή)

Ονομάζουμε προδράγμα το ζεύγος $(\{\mathcal{F}(U)\}_{U \subseteq X \text{ ανοιχτό}}, \{\rho_{V,U}\}_{V,U \subseteq \ldots})$

όπου $\rho_{V,U}: \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ απεικονίσεις που ικανοποιούν

1) αν $V \subseteq U$ ανοιχτό, τότε $\exists\, \rho_{V,W}: \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(W)$ μορφισμός "περιορισμός"

2) $\forall W \subseteq V \subseteq U$, τότε $\rho_{W,U} = \rho_{W,V} \circ \rho_{V,U}$. "καλή σύνθεση"

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(W) \arrow[r, "\rho_{V,W}"] \arrow[dr, "\rho_{U,W}"'] & \mathcal{F}(V) \arrow[d, "\rho_{U,V}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\ & \mathcal{F}(U) \end{tikzcd}$$

$\rho_{U,U} = id_{\mathcal{F}(U)}: \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U)$

(Θέλαμε να ορίσουμε $\mathcal{O}_X: U \longrightarrow \mathcal{O}_X(U) :=$ συναρτήσεις που ορίζονται στο U)

Ένα προδράγμα θα ονομάζεται $\overset{\text{sheaf}}{\text{δράγμα}}$ αν ικανοποιεί τα ακόλουθα δύο

1) αν $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ ανοιχτό, τότε ισχύει ότι
$a \in \mathcal{F}(U)$ με $\rho_{U_i,U}(a) = 0 \ \forall i \in I \Rightarrow a = 0$.

2) Αν $a_i \in \mathcal{F}(U_i)\ \forall i$ τω $\rho_{U_i \cap U_j, U_i}(a_i) = \rho_{U_i \cap U_j, U_j}(a_j)\ \forall i,j$
τότε $\exists\, a \in \mathcal{F}(U)$ τω $\rho_{U_i}(a) = a_i \ \forall i$.

δηλ. το τοπικό καθορίζει το ολικό

~~Έχουμε τον τοπ. χώρο X = Spec R και θέλαμε να ορίσουμε sheaf συναρτήσεων σε: Έχουμε ότι~~

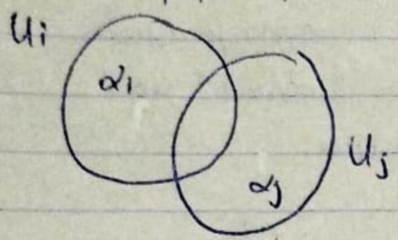
$\cancel{\mathcal{O}_X(X) = R}$

$\cancel{\mathcal{O}_X(X_f) = R_f}$

$\cancel{\mathcal{O}_{X,f} = \varinjlim}$

πχ) Αν $X = \mathbb{C}$ και $U \subseteq \mathbb{C}$ αν., τότε μπορώ να ορίσω
$\mathcal{O}_X(U) = \{ f: U \to \mathbb{C} \mid f \text{ αναλυτική} \}$
και θέτοντας $\rho_{U,V}(f) = f|_U$ παίρνω ένα sheaf

(*) Τι ακριβώς μας δίνουν οι συνθήκες του sheaf?



αν έχω συνάρτηση α_i στο U_i και α_j στο U_j που ταυτίζονται στην τομή, τότε μπορώ να τις κολλήσω και να πάρω μία συνάρτηση στο $U_i \cup U_j$

→ φύτρο / germ

Ορσ: Θεωρούμε δύο συναρτήσεις $f \in \mathcal{O}_X(U)$, $g \in \mathcal{O}_X(V)$ (ή γενικά $a \in \mathcal{F}(U)$ και $b \in \mathcal{F}(V)$), τότε ορίζουμε

$f \sim_P g \iff \exists$ κοινός περιορ. στο $W \subseteq U \cap V$ με $P \in W$

τω $f|_W = g|_W$

(ή $\rho_{W,U}(\alpha) = \rho_{W,V}(\beta)$ με $P \in W$)

Σκοπός: Στην μιγαδική ανάλυση δύο αναλυτικές συναρτήσεις που έχουν ίδιες σειρές Taylor στο P θέλω να ταυτίζονται

δηλ αν κοιτάξω αρκετά στο P είναι ίδιες

Ορίζουμε $\mathcal{O}_{X,P} = \varinjlim_{U \ni P} \mathcal{O}_X(U)$ ή γενικά $\mathcal{F}_{X,P} = \varinjlim_{U \ni P} \mathcal{F}(U)$

↳ germ στο P

Ορισμός Ευθέως Ορίου:

Έστω $(I, \leq)$ μερικά διατεταγμένο σύνολο τω $\forall i,j \in I \ \exists c \in I$ τω $i \leq c$ και $j \leq c$

και $f_{ij} : A_i \longrightarrow A_j \ \forall i \leq j$ τω $f_{ii} = id_{A_i}$ και $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$ $i \leq j \leq k$

↳ κάποιο αντικείμενο

Το ζεύγος $(\{A_i\}_{i \in I}, \{f_{ij}\}_{i \leq j \in I})$ ονομάζεται ευθύ σύστημα

Ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας

$x_i \sim x_j \iff \exists k$ τω $f_{ik}(x_i) = f_{jk}(x_j)$

και ορίζουμε το ευθύ όριο ως

$A = \varinjlim_{A_I} A_i = \bigsqcup_{i \in I} A_i / \sim$

Σε εμας εχαμε $I = \{$ αν. υποσυνολα που περ το $R\}$ με
$U \leq V \iff U \subseteq V$
και τοτε $c = U \cup V = \phi$.
$f_{ij} = \rho_{ji}$

Εχαμε τον τοπ χώρο $X = \operatorname{Spec} R$ και θελαμε να ορίσουμε sheaf συναρτήσεων του

κοίτα να δεις που στα sheaves εμφανίζονται localizations...

$$\mathcal{O}_X(X) = R$$
$$\mathcal{O}_X(X_f) = R_f$$
$$\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} = \lim_{X_f \ni \mathfrak{p}} X_f = R_{\mathfrak{p}} = (R-\mathfrak{p})^{-1} R$$

ενδιαφέρον

ΔΔο αυτά αποτελούν sheaf

θα μιλήσουμε για $\mathcal{O}_X$-modules, δηλ. ενα sheaf M που το $M(U)$ να ειναι $\mathcal{O}_X(U)$-module

Ο περιορισμός εδω δεν ειναι σαν την τοπολογία του $\mathbb{C}$ που κατανοώ διαισθητικά καλύτερα.

$$X_f \supseteq X_g \iff g \in \sqrt{\langle f \rangle} \iff g^m = \alpha f \text{ για καποιο } \alpha \in R$$

$f = \frac{g^m}{\alpha}$ διαισθητικά

$$\begin{array}{cc} \mathcal{O}_X(X_f) & \mathcal{O}_X(X_g) \\ \| & \| \\ R_f & R_g \end{array}$$

θα ορίσουμε $\rho_{g,f} : \mathcal{O}_X(X_f) \longrightarrow \mathcal{O}_X(X_g) : \frac{r}{f^k} \longmapsto \frac{r\alpha}{g^{mk}}$

Πρέπει κανεί νδο είναι καλα ορισμένο, δηλ αν $\frac{r_1}{f_1^{k_1}} = \frac{r_2}{f_2^{k_2}}$, τότε

$$\frac{r_1 \alpha}{g^{mk_1}} = \frac{r_2 \alpha}{g^{mk_2}}$$

και για $X_f \supseteq X_g \supseteq X_h$

$$\begin{tikzcd} r/f^k \arrow[rr, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & & r\beta/h^{mk} \\ & r\alpha/g^{mk} \arrow[ur, mapsto, dashed] & \end{tikzcd}$$

δεν έχει νόημα η κατασκευή σε ∅ σύνολο

(*) Είδαμε ότι $D(f) = X_f = \emptyset \Leftrightarrow f$ μηδενοδύναμο

Σε αυτή περιοχή δεν έχουμε τέτοια πράγματα, αλλά μπορεί κανείς να θέλει να μελετήσει ένα μη ανάγωγο αλγ σύνολο (σημειωμένο ανάγωγο)

προκύπτει από ανάγωγο με διαταραχές (∂ παραμορφώσεων)

ο Grothendieck ήθελε να βγάλει όλη την ανάλυση και να τα δει στο αλγεβρικό