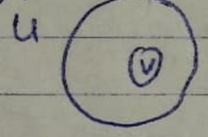
Μέχρι τώρα έχουμε ορίσει: $X = \operatorname{Spec} R$

$$X_f = \{P \in X \mid f \notin P\} = D(f)$$
$$X_f \cap X_g = X_{fg}$$
$$X_f \supseteq X_g \Leftrightarrow g \in \sqrt{\langle f \rangle}$$

→ Για να ορίσουμε το sheaf πρέπει να πούμε τι σημαίνει $\mathcal{O}_X(U)$ για κάθε U ανοικτό.
Σε ένα ανοικτό X_f ορίσαμε

$$X_f \xrightarrow{\mathcal{O}_X} R_f$$

συναρτητής από την κατηγορία των ανοικτών στην κατηγορία των δακτυλίων
Χρειαζόμαστε και τη συνάρτηση περιορισμού



$V \subseteq U \Rightarrow \mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(V)$

Περιορισμός από το μεγάλο στο μικρό

Για $X_g \subseteq X_f \Leftrightarrow g \in \sqrt{\langle f \rangle} \Leftrightarrow g^m = af,\ a \in R$

$$\mathcal{O}_X(X_f) \longrightarrow \mathcal{O}_X(X_g)$$
$$\frac{r}{f^n} \longmapsto \frac{ra}{g^{m\cdot n}}$$

καλά ορισ. (άσκηση)

Μάλιστα μπορεί κανείς να ελέγξει ότι ο περιορισμός λειτουργεί μεταβατικά

$$X_f \supseteq X_g \supseteq X_h \Rightarrow \rho_{X_h X_g} \circ \rho_{X_g X_f} = \rho_{X_h X_f}$$

Έστω $U_P = \{X_f \mid P \in X_f\} = \{X_f \mid f \notin P\}$, τότε έχουμε ορίσει τη μερική διάταξη

$$X_f \leq X_g \Leftrightarrow X_f \supseteq X_g$$

και δύο τυχαία X_f, X_g έχουν κοινό περιορ. $X_g \cap X_f = X_{fg}$.
Και έτσι ορίσαμε το germ

$$\mathcal{O}_{X,P} = \varinjlim_{U \ni P} \mathcal{O}_X(U)$$

λειτουργεί σαν τη σειρά Taylor

Αν $f \in \mathcal{O}_X(U)$, $g \in \mathcal{O}_X(V)$, τότε $f = g \Leftrightarrow \exists W \subseteq U \cap V$ ώστε $res_{U,W} f = res_{V,W}\, g$
ή $f|_W = g|_W$

Όμοια με τη μιγαδική περίπτωση παίρνουμε

$$R_P = \lim_{X_f \in U_P} R_f$$

$\boxed{\text{Πρόταση III 3.4}}$

ο δακτύλιος των φύτρων (έτσι συνδέονται οι 2 έννοιες του εντοπισμού)

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕ ΜΕΓΑΛΑ ΑΝΟΙΚΤΑ

Θέλω $f: \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^n$ με $J_f(P) \neq 0$
στην κλασσική γεωμετρία παίρνω μικρή ανοικτή περιοχή U που κάνει την $f|_U$ αμφιδιαφόριση.
εδώ οι συναρτήσεις δεν αντιστρέφονται τοπικά

↳ το αντιμετωπίζουμε επιβάλλοντας η f να είναι ανοικτή [redacted] (Étalé topologie).

Απόδειξη:

· Έστω $\frac{g}{f} \in R_P$, δηλ $f \notin P \Leftrightarrow f(P) = f \bmod P \neq 0 \bmod P$ δεν θέλω μηδενισμό

Απεικονίζουμε

$$g/f \longmapsto [(\tfrac{g}{f}, X_f)]$$ η κλάση στο ευθύ όριο

Πρέπει νδο η κατασκευή είναι ανεξ των αντιπροσώπων. Έστω $\frac{g}{f} = \frac{g'}{f'}$, τότε $\exists s \in R \setminus P$ ώστε $s(gf' - fg') = 0$

και έχουμε εικόνες $\frac{g}{f} \longmapsto [(\frac{g}{f}, X_f)]$ και $\frac{g'}{f'} \longmapsto [(\frac{g'}{f'}, X_{f'})]$

αρκεί νδο οι εικόνες ταυτίζονται σε κοινό περιορ. $X_f \cap X_{f'} = X_{ff'}$

$$[(\tfrac{g}{f}, X_f)] = [(\tfrac{gf'}{ff'}, X_{ff'})] = [(\tfrac{g'f}{ff'}, X_{ff'})] = [(\tfrac{g'}{f'}, X_{f'})]$$

όμοια δείχνουμε ότι είναι ομομορφισμός χρησιμοποιώντας τις πράξεις στον εντοπισμό

$$\frac{f}{g} \cdot \frac{f'}{g'} = \frac{ff'}{gg'}$$

και $$\frac{f}{g} + \frac{f'}{g'} = \frac{fg' + gf'}{gg'}$$

Ας δούμε τώρα την αντίστροφη απεικόνιση

$$\varinjlim_{X_f \in U_p} R_f \ni \left[\left(\frac{g}{f^m}, X_f\right)\right] \longmapsto \frac{g}{f^m} \in R_p$$

<u>καλά ορσ.</u>: $\left[\left(\frac{g'}{h^n}, X_h\right)\right] = \left[\left(\frac{g}{f^m}, X_f\right)\right] \iff \frac{g'}{h^n} = \frac{g}{f^m}$ (Άσκηση)

<u>ομομορφισμός</u>: το ίδιο

Τέλος, συνθέτω και βλέπω ότι είναι η μία αντίστροφη της άλλης. ∎

<u>πχ</u> (1) $\mathbb{Q} = \mathbb{Z}_{\langle 0 \rangle} = \varinjlim_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}_f \ni 0} \mathbb{Z}_f$ ο δακτύλιος των φύτρων στο generic point του Spec$\mathbb{Z}$

Σε ένα τυχαίο πρώτο ιδεώδες έχουμε

$$\mathbb{Z}_{\langle p\mathbb{Z} \rangle} = \varinjlim_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}_f \ni p} \mathbb{Z}_f$$

$$\| $$

$$\left\{\frac{\alpha}{\beta} \mid p \nmid \beta\right\}$$

(2) Την ίδια κατασκευή μπορώ να εφαρμόσω στα πολυώνυμα, δηλ

$$X = \operatorname{Spec} k[x] = \begin{cases} \langle x-\alpha \rangle & \text{γεωμετρικό σημείο} \\ 0 & \text{generic pt} \end{cases}$$ αν k αλγ. κλειστό

τότε

$$k(X) = \varinjlim_{\operatorname{Spec} k[x]_f \ni 0} k[x]$$

ή $$\varinjlim_{\substack{\operatorname{Spec} X_f \\ f \ni m}} k[x] = \left\{\frac{g(x)}{f(x)} \,\middle|\, f(m) \neq 0\right\}$$ → οι ρητές συναρτήσεις που φράζονται στο m

↓

αυτό είναι ανάλογο και λιγότερο από τις αναλυτικές συναρτήσεις ή τα αναπτύγματα Taylor

(* $m = \langle x \rangle$ και $\frac{1}{1-x} \in k[x]_{\langle 0 \rangle}$

↳ δεν ξέρω πως να το αναλύσω σε δυναμοσειρά $\sum x^i \in k[[x]]$ θέλω πλήρωση

* βάζοντας πλήρωση στο $\mathbb{Z}_{\langle p\mathbb{Z} \rangle}$ παίρνουμε τους ακ. p-αδικούς $\mathbb{Z}_p$

Τι γίνεται αν k όχι αλγ. κλειστό; (π.χ. το $\mathbb{Q}$)

$\langle 0\rangle \to$ πρώτο ιδεώδες

$$\begin{array}{c} \operatorname{Spec}\mathbb{Q}[x] \to \mathfrak{p} = \langle f(x)\rangle \\ | \\ \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[x] \end{array}$$

παράγεται από μονικό ανάγωγο $f \in \mathbb{Q}[x]$

έχω $\underset{\mathbb{Q}[x]}{f(x)}$ με ρίζες $p_1\ p_2 \dots p_n \in \overline{\mathbb{Q}}$, όμως $p_i \notin \mathbb{Q}$

Εδώ τα σημεία μπορούν να ειδωθούν ως τροχιές της $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ πάνω στην $\overline{\mathbb{Q}}$.

βλέπε J.S. Milne

PRESHEAF ⟶ SHEAF

Έστω $X = \operatorname{Spec} R$

Λήμμα: Αν $X_f = \bigcup_{i\in I} X_{f_i}$ και $\alpha \in \underset{\mathcal{O}_X(X_f)}{R_f}$ τω $\rho_{X_{f_i}, X_f}(\alpha) = 0\ \forall i \in I$, τότε $\alpha = 0$.

μικρό μεγάλο

Απόδειξη:

Έστω $\alpha \in R_f$, τότε $\alpha = g/f^n$ για $g \in R$ και $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε ότι

$$\alpha = \frac{g}{f^n} = \frac{0}{1} \iff \exists s \in \underset{\langle f\rangle}{S} \text{ τω } s f^n \cdot g = 0 \iff f^{n+m} g = 0$$

για κάποιο $m \in \mathbb{N}$

Θεωρούμε το ιδεώδες $I = \{h \in R \mid hg = 0\}$ και παρατηρούμε ότι

$$\alpha = \frac{g}{f^m} = 0 \iff f \in \sqrt{I} = \bigcap_{I \subseteq \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R} \mathfrak{p}$$

$$\iff f \in \mathfrak{p} \quad \forall I \subseteq \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$$

Έστω προς άτοπο ότι $\alpha \neq 0$ στον R_f, τότε $\exists \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ με $I \subseteq \mathfrak{p}$ και $f \notin \mathfrak{p}$

$$\begin{tikzcd} R_f \arrow[rr, "\text{περιορισμός}"] \arrow[dr] & & R_{f_\alpha} \arrow[dl, "\text{προβολή στο ευθύ όριο}"] \\ & R_{\mathfrak{p}} & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \frac{g}{f^n}\ \alpha \arrow[rr, "\text{περιορ.}"] \arrow[dr] & & 0 \arrow[dl, "\text{προβολή}"] \\ & \frac{g}{f^m}\quad 0 & \end{tikzcd}$$

Άρα $g/f^m = 0$ ε/p άτοπο, καθώς $\exists b \in R \setminus \mathfrak{p}$ τω $bg = 0$ άρα $b \in I$ όμως $\mathfrak{p} \supseteq I \Rightarrow b \in \mathfrak{p}$ άτοπο. ∎

Λήμμα 2: Έστω $X_f = \bigcup_{i\in I} X_{f_i}$ και $g_i \in R_{f_i}$ $\forall i \in I$ ώστε $\forall i,j \in I$

$$res_{X_{f_i f_j}, X_{f_i}}(g_i) = res_{X_{f_i f_j}, X_{f_j}}(g_j)$$

τότε $\exists g \in R_f$ ώστε

$$g_i = \rho_{X_{f_i}, X_f}(g) \quad \forall i \in I.$$

Απόδειξη:

Θεωρούμε $\phi_f : R \longrightarrow R_f : r \longmapsto \frac{rf}{f} := \bar{r}$ πως βάζω τα στοιχεία του R στον εντοπισμό

Εχουμε ότι $X_f \supseteq X_g \Leftrightarrow g \in \sqrt{\langle f \rangle}$. Θδο $R_g \cong (R_f)_{\bar{g}}$

$g \in \sqrt{\langle f \rangle} \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ και $\alpha \in R$ ώστε $g^n = \alpha f$

Ορίζουμε απεικόνιση

$$\Phi : R_g \longrightarrow (R_f)_{\bar{g}}$$

$$\frac{r}{g^l} \longmapsto \frac{\bar{r}}{\bar{g}^l} \qquad r \in R$$

(καλά ορισ.) άσκηση

ο οποίος είναι ομομορφισμός δακτυλίων (άσκηση)

Αντίστροφα ορίζουμε

$$\Psi : (R_f)_{\bar{g}} \longrightarrow R_g$$

$$\frac{\frac{r}{f^k}}{\bar{g}^l} \longmapsto \frac{r\alpha^k}{g^{nk+l}} = \frac{\frac{r}{(g^n/\alpha)^k}}{g^l}$$

επίσης καλά ορισ. ομομορφ. δακτυλίων αντίστροφος της Φ. (άσκηση)

⚠ Δύο διαδοχικές localization δεν δακτύλιων εν γένει.

Θα θέσουμε $R_f = \bar{R}$ και θα δείξουμε ότι $X = \mathrm{Spec}\,\bar{R} = \bigcup_{i\in I} X_{\bar{f_i}}$ → $\mathrm{Spec}\,\bar{R}_{\bar{f_i}}$

αντικαθιστώ $(R_f)_{f_i}$ με $\bar{R}_{\bar{f_i}}$

... Η συνέχεια την Τετάρτη

Συνέχεια απόδειξης:

Έχουμε $\bar{R} = R_f$, $\bar{R}_{\bar{g}} = (R_f)_{\bar{g}} \cong$ και τότε $X_f = \bar{X} = \operatorname{Spec}\bar{R}$

Αν $\bar{f_i} \in \bar{R}$ καθορίζεται από το f_i, τότε

$$X_{f_i} = \bar{X}_{\bar{f_i}}$$

Καθώς X ημισυμπαγές, έχουμε ότι $X = \bigcup_{i=1}^{m} X_{f_i}$ για κάποια f_i, τότε

Επίσης, γράφω τα $g_j \in R_{f_j}$ ως

$$g_j = \frac{a_j}{f_j^m}$$

με ίδια βάση στον παρονομαστή

$$g_j = \frac{a_j'}{f_j^{m_j}} = \frac{a_j' \cdot f_j^{m-m_j}}{f_j^m} = \frac{a_j}{f_j^m}$$

για $m = \max_{j=1,\dots,n}\{m_j\}$

Η υπόθεση ισων περιορ. δίνει

$$\rho_{X_{f_i f_j}X_{f_i}}(g_i) = \rho_{X_{f_i f_j}X_{f_j}}(g_j) \Leftrightarrow \frac{f_j^m a_i}{(f_i f_j)^m} = \frac{f_i^m a_j}{(f_i f_j)^m}$$

$$\Leftrightarrow \exists n_{ij} \in \mathbb{N} \text{ τω } (f_i f_j)^{n_{ij}}(f_j^m a_i - f_i^m a_j) = 0 \quad \forall 1 \leq i < j \leq n$$

Έστω $N > n_{ij} + m$ για όλα τα $1 \leq i < j \leq n$, τότε για $k = 1, \dots, n$ έχουμε ότι

$$g_k = \frac{a_k'}{f_k^N}$$

και άρα $a_k' f_j^N - a_j' f_k^N = 0$.

Από την άλλη έχουμε ότι $X_{f_i} = X_{f_i^N}$, οπότε μπορούμε να γράψουμε

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} X_{f_i^N}$$

Άρα $\exists b_i \in R$ τω $b_1 f_1^N + \dots + b_n f_n^N = 1$ $\qquad \operatorname{Spec}R = \bigcup_{i=1}^{n} (\operatorname{Spec}R)_{f_i}$

Θεωρούμε τώρα την ποσότητα

$$g = \sum_{j=1}^{n} b_j a_j' \Rightarrow f_i^N g = \sum_{j=1}^{n} b_j f_i a_j'$$

$$\Rightarrow f_i^N g = \sum_{j=1}^{n} b_j f_j a_i'$$

$$\Rightarrow f_i^N g = a_i'$$

Άρα, $g = \frac{a_i'}{f^N} = g|_{X_{f_i}} = g_i$

Τέλος, για τυχαίο i θεωρούμε $h_i = g_i - \rho_{X_{f_i}, X_f}(g)$ $\forall\, 1 \leq j \leq n$

$$\rho_{X_{f_j f_i} X_{f_i}}(h_i) = \rho_{X_{f_j f_i} X_{f_i}}(g_i) - \rho_{X_{f_j f_i} X_f}(g)$$

από ίδιους περιορισ.

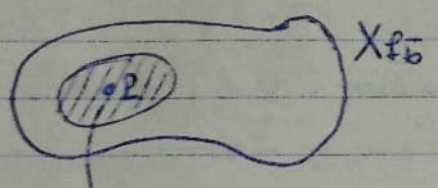
$$= \rho_{X_{f_j f_i}, X_{f_j}}(g_j) - \rho_{X_{f_j f_i}, X_f}(g)$$

$$= \rho_{X_{f_j f_i} X}(g) - \rho_{X_{f_i f_j}, X}(g) = 0$$

Άρα $h_i = 0$ ~~και~~ άρα $g_i = \rho_{X_{f_i}, X}(g)$ $\forall i \in I$. $\blacksquare$

Έστω $U \subseteq X$ τυχαίο ανοιχτό, τότε ορίζουμε

$$\underline{\underline{\mathcal{O}_X(U)}} = \left\{ \{s_p\} \in \prod_{p \in U} R_p \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{για ένα ανοιχτό κάλυμμα } \{X_{f_b}\}_{b \in B} \text{ του } U \\ \exists s_b \in R_{f_b} \text{ ώστε } \forall p \in X_{f_b} \text{ το φύτρο του } s_b \text{ στο } p \\ \text{να ταυτίζεται με το } s_p \end{array} \right\}$$



$s_p \in R_p$ (όπου $s_p = [(X_{f_b}, s_b)]$)

πχ | $\dfrac{1}{1-t} = \sum_{i=0}^{\infty} t^i$, $a_0 + a_1(t-p) + \dots$

εντοπισμός ρητής συνάρτησης σε γειτονιά σημείου.

Ορ. Ένα affine scheme είναι το ζεύγος $(X, \mathcal{O}_X)$, όπου $X = \operatorname{Spec} R$ και $\mathcal{O}_X$ το sheaf των κανονικών αναρτήσεων (sheaf δομής)

πχ | 1. $(\operatorname{Spec} k, k)$ όπου k κάποιο σώμα

$\downarrow$ περιέχει μόνο το $\langle 0 \rangle$ $\xrightarrow[\text{διακριτή τοπολογία}]{\text{έχει την}}$ $\mathcal{O}_{\langle 0 \rangle} = k$

2. Η αφινική γραμμή $\operatorname{Spec} k[x] = \mathbb{A}^1_k \rightsquigarrow \langle x - \alpha \rangle$, $\langle f \rangle$, είναι πρώτα ιδεώδη (f ανάγωγο)

ισχύει ότι $\overline{\langle 0 \rangle} = V(0) = \{ P \supseteq 0 \} = \operatorname{Spec} k[x]$ GENERIC PT.

Αν έχουμε P πρώτο, αλλά όχι μεγιστικό, τότε

$$\overline{P} = V(P) = \{ Q \text{ πρώτο} \mid Q \supseteq P \}$$

Αν k αλγ. κλειστό, τότε $\langle x - \alpha \rangle$ τα κλειστά σημεία

$$k[x]_{\langle x-\alpha \rangle} = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \;\middle|\; f, g \in k[x],\ g(\alpha) \neq 0 \right\} = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} k[x]}(X_{x-\alpha})$$

$$k[x]_{\langle h(x) \rangle} = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \;\middle|\; f, g \in k[x],\ h \nmid g \right\}$$

$$k[x]_{\langle 0 \rangle} = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \;\middle|\; f, g \in k[x],\ g(x) \neq 0 \right\} = k(x) = k(\mathbb{A}^1_k)$$

(οι ρητές συναρτήσεις)

(3) $\mathbb{A}^2_k = \operatorname{Spec} k[x,y]$

μεγιστικά ιδεώδη $\longrightarrow$ $\langle x-a, y-b\rangle = m_{a,b}$ $\{\ \overline{m_{a,b}} = V(m_{a,b}) = m_{a,b}\ \}$

ΚΛΕΙΣΤΑ ΣΗΜΕΙΑ

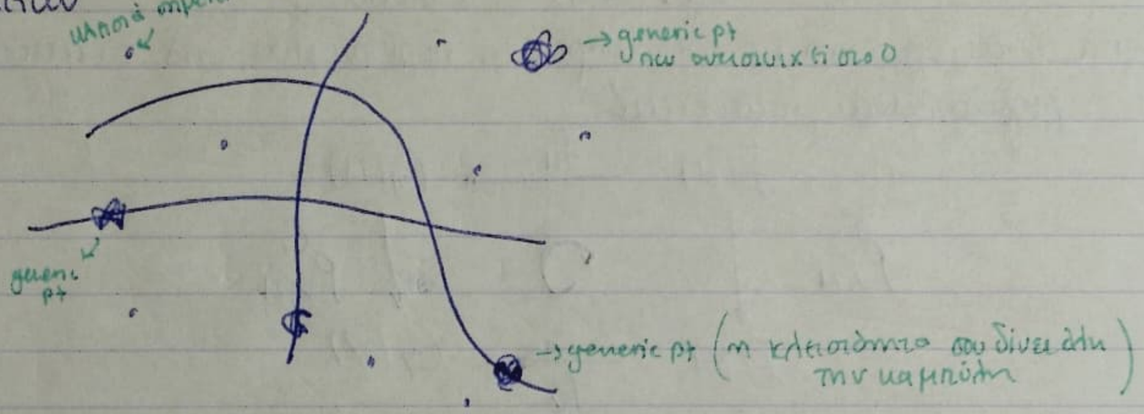
πρώτα ιδεώδη $\longrightarrow$ $P = \langle h(x,y)\rangle$ για $h(x,y)$ ανάγωγο

$\{\ \overline{P} = V(P) = \{ Q \supseteq P \mid Q \text{ πρώτο} \} \neq P\ \}$ καμπύλη με 1 generic pt

πχ. $\overline{\langle x^2+y^2-1\rangle} \ni \langle x-1, y\rangle$

Και το $\langle 0\rangle \to$ generic pt.

Άρα ένα γνήσιο κλειστό υποσύνολο του Spec k[x] αποτελείται από πεπερασμένο αριθμό ανάγωγων καμπυλών, generic points και κλειστών σημείων

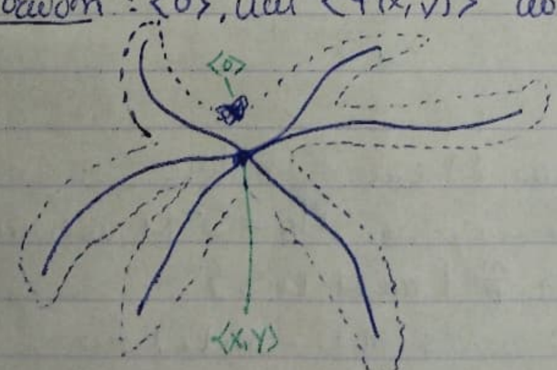


4. Θεωρούμε $\mathcal{O} = \left\{ \frac{f(x,y)}{g(x,y)} \,\middle|\, g(0,0) \neq 0 \right\} = k[x,y]_{(0,0)}$

→ μοναδικό κλειστό σημείο του Spec $\mathcal{O}$

Το $\langle x,y\rangle$ είναι μεγιστικό ιδεώδες $(\mathcal{O}/\langle x,y\rangle = k)$

Κύρια πρώτα ιδεώδη: $\langle 0\rangle$, και $\langle f(x,y)\rangle$ με $f(0,0)=0$ και f ανάγωγο



Έχω δηλαδή κάθε υπερεπιφάνεια που διέρχεται από το (0,0) και άρα δεν αντιστρέφεται

Τα πρώτα ιδεώδη ζουν σε μια περιοχή του $(0,0)$ και δεν μπορούν να επικαλυφθούν. Ωστόσο, συνεχίζουν να μας δίνουν κάποια σημαντικά

$$\mathcal{O}_{\langle x-y\rangle} = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \;\middle|\; g(0)\neq 0 \right\}$$

$\downarrow$

όχι σώμα καθώς το $\langle x\rangle$ είναι μη τετριμμένο ιδεώδες που δεν αντιστρ.

Ιδιότητες των Sheaves

Θέλαμε να ορίσουμε δακτυλιόχωρους (Ringed Spaces)

$\mathcal{F}$ sheaf στον X και $U \subseteq X$ ανοιχτό

* ορίζουμε τότε ένα sheaf ~~στο~~ $\mathcal{F}|_U$ στο U με
  με $\mathcal{F}|_U(V) = \mathcal{V}$ για $V \subseteq U$ ανοιχτό

* Έστω $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ sheaves επί του X, ~~τότε~~ $\forall U \subseteq X$ ανοιχτό $\exists$ ομομορφισμός

$$f_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$$

που είναι συμβατή με τις συναρτήσεις περιορισμού, δηλ το ακόλουθο τετράγωνο είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "f_U"] \arrow[d, "\rho^{\mathcal{F}}_{V,U}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\rho^{\mathcal{G}}_{V,U}"] \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "f_V"'] & \mathcal{G}(V)
\end{tikzcd}$$

τότε η $f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ ονομάζεται ομομορφισμός sheaves

Επίσης, μια $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ επάγει ομομορφισμό στους δακτυλίους φύτρων

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}_x & \xrightarrow{f_x} & \mathcal{G}_x \\
\| & & \| \\
\varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U) & & \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{G}(U)
\end{array}$$

καλά ορισ από ιδιότητα συμβατότητας στους περιορισ

πχ Έστω R δακτύλιος και M ένα R-module

Αν $S \subseteq R$ πολλαπλ/στικό, τότε ορίζουμε $M_S = S^{-1}M$ να είναι το

$$M_S = \left\{ \frac{m}{t} \;\middle|\; m \in M,\ t \in S \right\}$$

όπου $\frac{m_1}{t_1} = \frac{m_2}{t_2} \iff \exists s \in S$ τω $s(m_1 t_1 - m_2 t_2) = 0$

$\Downarrow$

δεν έχω θέμα με δεξί - αριστερό module γιατί R μεταθετικός

Μπορεί κανείς να δει αυτή την κατασκευή ως τανυστικό γινόμενο

$$S^{-1}M = S^{-1}R \otimes_R M$$

extension of scalars μέσω τανυστικού γινομένου

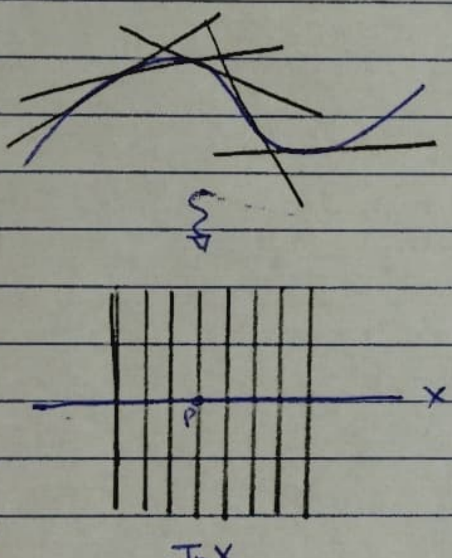
Όμοια με το R, αν $S = \{f, f^2, f^3, \dots\}$ γράφουμε M_f, ενώ για $S = R \setminus \mathfrak{p}$ όπου $\mathfrak{p} \trianglelefteq R$ πρώτο γράφουμε $M_{\mathfrak{p}}$

$$M_f = R_f \otimes_R M \qquad\qquad M_{\mathfrak{p}} = R_{\mathfrak{p}} \otimes_R M$$

R_f-module $\qquad\qquad$ $R_{\mathfrak{p}}$-module

Άρα ένα sheaf $(\mathrm{Spec}R, \mathcal{O}_X)$ ορίζει ένα sheaf $\mathcal{M}$ από modules

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ



* δεν μεταβάλλει και μοιάζει δ.χ. $\mathbb{R}^n$
* υπάρχουν vector bundles που συμπεριφέρονται καλά στις τομές

ΑΛΓΕΒΡΑ

$$\mathbb{Z} \qquad\qquad M: \mathbb{Z}\text{-module}$$

$$\mathbb{Z}^l \oplus \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/m_k\mathbb{Z}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \text{ οικογένεια δχ. υπεράνω } \mathbb{Z}$$

$$\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$$

$$p\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong \mathbb{F}_p \qquad \frac{M}{pM} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} M$$

$\mathbb{F}_p$ δχ. σταθερής διάστασης (Μ ελεύθερο)

flat ή projective

$$X = \mathrm{Spec}R : \quad R \longrightarrow \mathcal{O}_X$$

$${}_RM \longrightarrow \mathcal{M} \quad \text{sheaf από } \mathcal{O}_X\text{-module}$$

δηλ. για $U \subseteq X$ ανοιχτό παίρνω $\mathcal{M}(U)$ που είναι $\mathcal{O}_X(U)$-module

Ακόμη έχουμε

$$M \xrightarrow{f} N \Rightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{f} \mathcal{N}$$

coherent sheaves

μορφισμός modules $\qquad$ μορφισμοι sheaves