**Ορσ:** Ένας μορφισμός δραγμάτων θα λέγεται:

* 1-1 $\iff \forall U \subseteq X$ ανοικτό $f_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ 1-1
  $\iff \forall x \in X \; f_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ 1-1
* επί $\iff \forall x \in X \; f_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ επί

**πχ|** Γιατί δεν δουλεύει το $f_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ επί σαν ορισμός
Στο $\mathbb{C}$ με τη συνήθη τοπολογία έχουμε την ακόλουθη β.α.α

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{O}_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\pi} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{*} \longrightarrow 0$$

σταθερό sheaf — ολόμορφες συναρτήσεις — ολόμορφες συναρτήσεις που δεν μηδενίζονται

$\mathbb{Z}(U) = \mathbb{Z} \; \forall U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό

$P^{\mathbb{Z}}_{V,U}(n) = n$

με απεικονίσεις $i = n \longmapsto 2\pi i n$ και $\pi : f \longmapsto \exp f$.
Σε κάποιες μικρές περιοχές $U$ μπορώ να ορίσω το log, ωστόσο δεν ορίζεται επί συνάρτηση

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{*}(U)$$

καθώς δεν επεκτείνεται αναλυτικά το log σε όλο το $\mathbb{C}$.
Έτσι, έχουμε την αρχή της συνομολογίας των sheaves

$$0 \to \mathbb{Z}(\mathbb{C}) \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{*}(\mathbb{C}) \to \underset{\cong \; \mathbb{Z}}{H^1(\mathbb{C}^*, \mathbb{Z})} \to \cdots$$

## ΑΛΛΑΓΗ ΧΩΡΟΥ

Έστω $f : X \to Y$ συνεχής συνάρτηση μεταξύ τοπολ. χώρων και $\mathcal{F}$ sheaf στον $X$, τότε ορίζουμε sheaf στον $Y$ $f_*\mathcal{F}$ (pushforward) ως εξής:

$$\forall V \subseteq Y \text{ ανοικτό } f_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$$

Αντίστροφα, αν $f : X \to Y$ συνεχής και $\mathcal{G}$ sheaf στον $Y$, τότε ορίζουμε sheaf στον $X$ $f^{-1}\mathcal{G}$ ως εξής

$$\forall U \subseteq X \text{ ανοικτό } f^{-1}\mathcal{F}(U) = \varinjlim_{V \supseteq f(U) \text{ ανοικτό}} \mathcal{G}(V)$$

η $f$ ως συνεχής δεν εξασφαλίζει $U$ ανοικτό $\Rightarrow f(U)$ ανοικτό

**Ορσ:** Έστω $X$ τοπολ. χώρος και $\mathcal{O}_X$ ένα sheaf μεταθετικών δακτυλίων, τότε το ζεύγος $(X, \mathcal{O}_X)$ ονομάζεται ringed space (δακτυλιόχωρος).

**πχ |** Το $(\operatorname{Spec} R, \mathcal{R})$ είναι ένας τέτοιος χώρος καθώς το $\mathcal{R}$ είναι sheaf πάνω από το $\operatorname{Spec} R$ $(\mathcal{R}(X_f) = R_f)$.

**Ορσ:** Ένας μορφισμός μεταξύ ringed spaces είναι ένα ζεύγος

$$(f,\vartheta): (X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y,\mathcal{O}_Y)$$

όπου $f: X \to Y$ συνεχής συνάρτηση και $\vartheta: \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X$ μορφισμός sheaves.

τα φέρνω στον ίδιο χώρο ($Y$)

Για κάθε $U \subseteq Y$ ανοικτό έχουμε ότι $\vartheta(U): \mathcal{O}_Y(U) \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$
και για κάθε $x \in X$ έχουμε $\vartheta_x: \mathcal{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$

**Ορσ:** Αν για κάθε $x \in X$ ο $\mathcal{O}_{X,x}$ είναι τοπικός δακτύλιος, τότε ο $(X, \mathcal{O}_X)$ λέγεται locally ringed space.

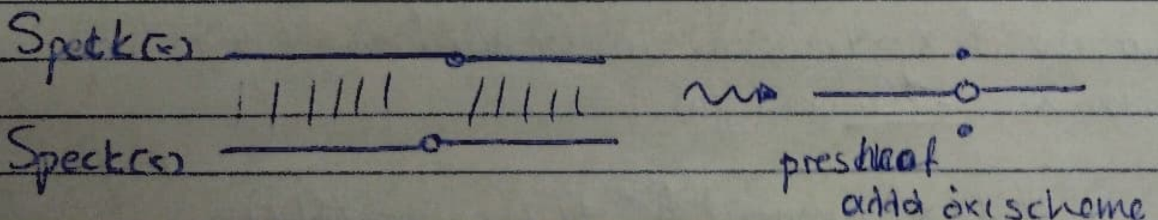
↳ στην οποία περίπτωση η $\vartheta_x$ είναι τοπικός ομομορφισμός δηλ. το μεγιστικό $m_y \trianglelefteq \mathcal{O}_{Y,f(x)}$ ~~περιέχεται~~ απεικονίζεται μέσα στο μεγιστικό $m_x \trianglelefteq \mathcal{O}_{X,x}$.

**Ορσ:** Έστω $(X, \mathcal{O}_X)$ locally ringed space. Αν $\exists (U_i)_{i \in I}$ ανοικτά καλύμματα του $X$ τ.ω. $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ είναι ισομορφικά με αφινικά σχήματα ως τοπικοί ringed spaces, τότε θα το ονομάσουμε prescheme.

είναι το ίδιο που κάνουν οι γεωμέτρες με τους χάρτες

$U = \operatorname{Spec} R_U$ → το αφινικό σχήμα παίζει το ρόλο του $\mathbb{R}^n$

**Υπενθ:** Είχαμε δει το εξής σχήμα



$\to \mathcal{F}$ sheaf

Πχ (1) Έστω $(X, \mathcal{O}_X)$ ringed space και $U \subseteq X$ ανοικτό, τότε $(U, \mathcal{O}_{X|U})$ ringed space.

↳ Αν $V \subseteq U$ ανοικτό, τότε μπορούμε να ορίσουμε sheaf $\mathcal{G}$ στο $U$

$$\mathcal{G}(V) = \mathcal{F}(V)$$

Συγκεκριμένα έχουμε $U \xhookrightarrow{i} X$ και ορίζουμε $i_*(\mathcal{O}_{X|U})$ sheaf στον $X$, δηλ. αν $V' \subseteq X$ ανοικτό, τότε

$$i^{-1}(V') = U \cap V' = V$$

άρα $i_*(\mathcal{O}_{X|U})(V') = \mathcal{O}_{X|U}(i^{-1}(V')) = \mathcal{O}_{X|U}(V) = \mathcal{O}_X(V)$

Κατασκευάζουμε και απεικόνιση $\partial : \mathcal{O}_X(W) \longrightarrow i_* \mathcal{O}_{X|U}(W)$

$$\mathcal{O}_X(W) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U \cap W)$$

και υπολογίζουμε $\partial_x : \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow \mathcal{O}_{X|U,x}$ είναι η ταυτοτική αν $x \in U$

$$[(f, V)] \longmapsto [(f, U \cap V)]$$

Ενώ για $x \in X \setminus \bar{U}$ ανοικτό $\Rightarrow \exists V \subseteq X$ ανοικτό του $x \in V$ και $U \cap V = \emptyset$.

και θα έχουμε ότι $i(V) = \emptyset \Rightarrow i_* \mathcal{O}_{X|U}(V) = \mathcal{O}_{X|U}(\emptyset) = 0$.

$$\text{δηλ.} \quad \partial_x = \begin{cases} id & \text{αν } x \in U \\ 0 & \text{αν } x \in X \setminus \bar{U} \end{cases}$$

→ στο σύνορο ~~???~~ δεν ξέρουμε ακόμα θέλουμε εργαλεία

(2) Έστω $R, S$ μεταθετικοί δακτύλιοι και $\phi : R \to S$ ομομορφισμός. Αυτοί ορίζουν αφινικά σχήματα $Y = (\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R})$ και $X = (\operatorname{Spec} S, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S})$ που είναι locally ringed spaces, τότε $\exists$ ομομορφισμός

$$(\varphi^a, \varphi^\#) : X \longrightarrow Y$$

Πράγματι, έχουμε $\varphi^a : \operatorname{Spec} S \longrightarrow \operatorname{Spec} R$

$$\mathfrak{p} \longmapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$$

$$\text{και} \quad \varphi^\# : \underset{\substack{\parallel \\ R_{\mathfrak{p}}}}{\mathcal{O}_Y(Y_{\mathfrak{p}})} \longrightarrow \varphi^a_* \mathcal{O}_X(Y_{\mathfrak{p}}) = \mathcal{O}_X((\varphi^a)^{-1}(Y_{\mathfrak{p}}))$$

$$= \mathcal{O}_X(X_{\varphi(\mathfrak{p})}) = S_{\phi(\mathfrak{p})}$$

δηλ. $\varphi^\# : R_{\mathfrak{p}} \longrightarrow S_{\phi(\mathfrak{p})}$

ορίζεται για την εντοπιοποίηση $\phi_{\mathfrak{p}} : \frac{r}{f^n} \longmapsto \frac{\phi(r)}{\phi(f)^n}$

Καθώς μιλάμε για locally ringed space ορίζεται και η

$$\varphi_{\mathfrak{p}}^\# : S_{\mathfrak{p}} \longrightarrow R_{\phi^{-1}(\mathfrak{p})}$$

# Προβολικός Χώρος και Σχήματα

Έστω $R = k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ και $\mathbb{P}_k^n = \{P \mid P \trianglelefteq R$ ομογενές και πρώτο κ' $P \neq \langle x_0, \dots, x_n \rangle\}$

Θεωρούμε $R_d = \{f \in R \mid f$ ομογενές βαθμού $d\}$ και για κάθε $I \trianglelefteq R$ γράφουμε

$$I_d = I \cap R_d$$

παίρνει τη θέση του Spec R

Αν $I \trianglelefteq R$ ομογενές, τότε $I = \bigoplus_{d=0}^{\infty} I_d$ και $V(I) = \{P \in \mathbb{P}_k^n \mid I \subseteq P\}$

Θεωρώντας ως κλειστά τα $V(I)$ ορίζουμε μια τοπολογία στον $\mathbb{P}_k^n$, όπου τα θεμελιώδη ανοικτά ορίζονται για $f \in R$ ομογενή ως

$$D(f) = \{P \in \mathbb{P}_k^n \mid f \notin P\}$$

Εδώ θα ορίσουμε sheaf $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}$ ως εξής:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(D_+(f)) = \left\{ \frac{g}{f^m} \mid m \geq 1,\ g \text{ ομογενές και } \deg(g) = m\deg(f) \right\}$$

παίζει το ρόλο των συναρτήσεων στο $D_+(f)$

$\frac{\text{ομογενές}}{\text{ομογενές}}$ όχι αυθαίρετα συνάρτηση αλλά το ίδιο βαθμό για να απλοποιείται το ομογενές

Αν περιοριστούμε στα μέγιστα $g_m = g \bmod m$

$f(m) = f(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$

$f(\lambda m) = \lambda^{\deg f} f(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$

↳ ως ρητές 0 βαθμού αυτό εξαφανίζεται $(=1)$

Τότε ο χώρος $(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n})$ είναι ringed space αποδεικνύεται locally ringed space και scheme ως εξής:

$$U_j = D_+(x_j) \quad j = 0, 1, \dots, n$$

και τότε έχουμε ότι $\mathbb{P}_k^n = \bigcup_{j=0}^{n} U_j$

$\langle x_0, \dots, x_n \rangle$ μέγιστο του $R$ αλλά δεν περιέχεται στο $\mathbb{P}_k^n$

↳ $\langle x_0, \dots, x_n \rangle \not\subseteq P$ για τυχαίο $P$ και άρα $\exists j$ τω $x_j \notin P \Rightarrow P \in D_+(x_j)$

και ορίζω $R_j = k\left[\frac{x_0}{x_j}, \dots, \frac{x_{j-1}}{x_j}, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \dots, \frac{x_n}{x_j}\right]$