ΜΑΘΗΜΑ 15° 25/11

Proj S :

Ορσ: ο Δακτύλιος S ονομάζεται βαθμωτός δακτύλιος αν μπορεί να γραφτεί ως ευθύ άθροισμα

$$S = \bigoplus_{d=0}^{\infty} S_d$$

Τα σύνολα S_d ονομάζονται ομογενή βαθμού d και ικανοποιούν τη σχέση

$$S_d S_e \subseteq S_{d+e}$$

→ Έστω $I \trianglelefteq S$, τότε θεωρούμε $I_d = I \cap S_d$.
Αν ισχύει ότι

$$I = \bigoplus_{d=0}^{\infty} I_d$$

τότε το I θα λέγεται ομογενές ιδεώδες

πχ| 1) Αν $S = k[x_0, \dots, x_n]$, τότε γίνεται βαθμωτός δακτύλιος με
S_d = ομογενή πολυώνυμα βαθμού d

2) $S = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} H^d(-)$, cup product (ομολογική άλγεβρα - αλγεβρική τοπολογία)

Ορσ: Συμβολίζουμε $S_+ = \bigoplus_{d \geq 1} S_d$ θα παίζει το ρόλο του $\langle x_0, \dots, x_n \rangle = \bigoplus_{d \geq 1} k[x_0, \dots, x_n]_d$

(*) Το S_+ είναι ένα ομογενές πρώτο ιδεώδες.

Ορσ: Ονομάζουμε ~~ομογενές~~ φάσμα πρώτων του βαθμωτού δακτυλίου S το σύνολο

$$\text{Proj}\, S = \{ \mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \text{ ομογενές πρώτο του } S \text{ με } S_+ \not\subseteq \mathfrak{p} \}.$$

Τοπολογια Zariski

Για ένα ομογενές ιδεώδες α θέτουμε

$$V(\alpha) = \{ \mathfrak{p} \in \text{Proj}\, S \mid \alpha \subseteq \mathfrak{p} \}$$

Τα κλειστά της τοπολογίας

$D_+(f) = \{ P \in \mathrm{Proj}\, S \mid f \notin P \}$ για $f \in S_d$

↳ βάση ανοικτών της τοπολογίας

<u>SHEAF ΔΟΜΗΣ</u>:

ορίζουμε $\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}\, S}(D_+(f)) = \left\{ \frac{g}{f^m} \,\middle|\, g \in S_{md}, m \geq 1 \right\} = S_f^{(0)}$ $d = \deg f$

↑ στοιχεία βαθμού 0 στο localization

επεκτείνοντας όπως και στα αφινικά σχήματα μπορούμε να ορίσουμε ένα sheaf

$$(D_+(f), \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}\, S \mid D_+(f)}) \cong (\mathrm{Spec}\, S_f^{(0)}, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, S_f^{(0)}})$$

$\boxed{\text{(×) SCHEME = locally ringed space ⊕ Hausdorff ⊕ Seperated}}$

ΜΟΡΦΙΣΜΟΙ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Ορισμός:

1) Αν ~~X~~ τοπ. χώρος, τότε θα λέγεται <u>συνεκτικός</u> αν $\forall U_1, U_2 \subseteq M$ ανοικτά

$M = U_1 \cup U_2$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset \Rightarrow U_1 = X$ ή $U_1 = \emptyset$

2) Αν ~~X~~ $= F_1 \cup F_2$, $F_1 \cap F_2 = \emptyset \Rightarrow F_1 = X$ ή $F_1 = \emptyset$: τότε ο X είναι <u>μη ανάγωγος</u>

3) Το ~~scheme~~ $(X, \mathcal{O}_X)$ θα λέγεται <u>συνεκτικό</u> (ή <u>ανάγωγο</u>) αν ο υποκείμενος τοπολογικός χώρος είναι συνεκτικός (ή ανάγωγος)

Το scheme $(X, \mathcal{O}_X)$ θα λέγεται <u>ανηγμένο (reduced)</u> αν $\forall U \in X$ ανοικτό το $\mathcal{O}_X(U)$ δεν έχει μηδενοδύναμα

4) Το scheme $(X, \mathcal{O}_X)$ θα λέγεται <u>ακέραιο</u> αν $\forall U \in X$ ανοικτό ο δακτύλιος $\mathcal{O}_X(U)$ είναι ακ. περιοχή.

ρ] Παρατηρήσεις:

1) Ένα σχήμα είναι ανηγμένο $\Leftrightarrow$ ο δακτύλιος φύτρων δεν έχει μηδενοδύναμα

2) Ένα ακέραιο σχήμα είναι ανηγμένο

Πχ.1] Έστω A δακτύλιος και $A_1, A_2 \neq 0$ τω

$$A \cong A_1 \times A_2$$

τότε το Spec A δεν είναι ακέραια περιοχή, αφού

$$(\alpha, 0_{A_2}) \cdot (0_{A_1}, \beta) = 0_A$$

Ακόμη το Spec A δεν είναι συνεκτικό

Πράγματι, αν

$$e_1 = (1_{A_1}, 0_{A_2}) \quad \text{και} \quad e_2 = (0_{A_1}, 1_{A_2})$$

$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p_1^{\alpha_1}\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p_n^{\alpha_n}\mathbb{Z}$$

$$x \bmod n \mapsto (x \bmod p_1^{\alpha_1}, \dots, x \bmod p_n^{\alpha_n})$$

τότε

$$1_A = e_1 + e_2$$

και ισχύει ότι

$$e_1^2 = e_1, \quad e_2^2 = e_2, \quad e_1 \cdot e_2 = 0.$$

Έστω P πρώτο ιδεώδες του A.

$$e_1 \cdot e_2 = 0 \in P \Rightarrow e_1 \in P \text{ ή } e_2 \in P$$

όχι ταυτόχρονα τα 2 $\Rightarrow 1 \in P$ άτοπο

Έστω ότι $e_2 \in P$, τότε $0 \times A_2 \subseteq P$. Θεωρούμε τις προβολές

$$\pi_i : A \longrightarrow A_i, \quad i = 1, 2$$

και θέτω $P_i = \pi_i(P)$.

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ: Το P_1 είναι πρώτο

$\alpha_1, \alpha_2 \in A_1$ τω $\alpha_1\alpha_2 \in P_1 = \pi_1(P) \Rightarrow \exists b \in A_2$ τω $(\alpha_1\alpha_2, b) \in P$.

$$(\alpha_1\alpha_2, b) = (\alpha_1, b)(\alpha_2, b) \in P$$

$$\Rightarrow (\alpha_1, b) \in P \quad \text{ή} \quad (\alpha_2, b) \in P$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \in P_1 \quad \text{ή} \quad \alpha_2 \in P_1$$

$$\Rightarrow P_1 \text{ πρώτο}$$

Προφανώς, $\pi_1^{-1}(P_1) = P$ από κατασκευή ($\pi(P) = P_1 \Rightarrow \pi^{-1}(P_1) \supseteq P$)

Αν $\alpha_1 \in P_1$, τότε $(\alpha_1, \alpha_2) \in P$ για κάποιο $\alpha_2 \in P_2$

Επίσης, $0 \times A_2 \subseteq P$, οπότε για τυχαίο $b_2 \in A_2$ έχουμε ότι

$$(\alpha_1, b_2) = (\alpha_1, \alpha_2) + (0, b_2 - \alpha_2) \in P \Rightarrow \pi^{-1}(P_1) \subseteq P$$

Άρα, $e_1 \notin P$

Αν $e_1 \in P$, μπορούμε να δούμε $P_2 = \pi_2(P)$ πρώτο και $P = \pi_2^{-1}(P_2)$, και τότε $e_2 \notin P$

$$\overset{\operatorname{Spec} A_1}{\overset{\|}{}}\qquad\overset{\operatorname{Spec} A_2}{\overset{\|}{}}$$

Άρα, $\operatorname{Spec} A = D(e_1) \cup D(e_2)$, $D(e_1) \cap D(e_2) = \emptyset$

Επλ το $\operatorname{Spec} A$ δεν είναι συνεκτικό

Πχ2) Έστω k σώμα, τότε το $X = \operatorname{Spec} k[x,y]/\langle xy \rangle$ είναι μη ανάγωγο αφινικό σχήμα. Πράγματι, γράφουμε

$$X = V(x) \cup V(y)$$

και $V(x) \neq X \neq V(y)$, $V(x) \cong \operatorname{Spec} k[y]$ κ' $V(y) \cong \operatorname{Spec} k[x]$.

Το $V(x) \cap V(y) = \langle x, y \rangle$ σημείο και αντιστοιχεί στο $\langle x, y \rangle$

Πχ3) Έστω k σώμα, τότε ο υποκείμενος τοπολ. χώρος $\operatorname{Spec} k[x]/\langle x^2 \rangle$ αποτελείται από ένα σημείο και είναι ανάγωγος.
Όμως, το $\operatorname{Spec} k[x]/\langle x^2 \rangle$ δεν είναι reduced, αφού το $[x]$ είναι μηδενοδύναμο στοιχείο.

Λήμμα: Έστω $X = \operatorname{Spec} A$ αφινικό σχήμα, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1) X όχι συνεκτικό $\Leftrightarrow A \cong A_1 \times A_2$ $(A_1, A_2 \neq 0)$
2) X ανάγωγο $\Leftrightarrow \operatorname{nil}(A) = \sqrt{0_A}$ πρώτο ιδεώδες του A
3) X reduced $\Leftrightarrow \operatorname{nil}(A) = 0_A$
4) X ακέραιο $\Leftrightarrow A$ ακέραια περιοχή

Απόδειξη

1) $A \cong A_1 \times A_2 \Rightarrow A$ όχι συνεκτικό από το (Πχ1)

Αντιστρόφως, αν $X = U_1 \cup U_2$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ με U_1, U_2 ανοιχτά, τότε από τον ορ. του sheaf δομής έχουμε ότι

$$A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \Gamma(U_1 \cup U_2, \mathcal{O}_X) = \Gamma(U_1, \mathcal{O}_X) \times \Gamma(U_2, \mathcal{O}_X)$$

$$\text{ή } \mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}_X(U_1 \cup U_2) = \mathcal{O}_X(U_1) \times \mathcal{O}_X(U_2)$$

το ταίριασμα στην τομή είναι τετριμμένο $(\operatorname{res}_{U_1 \cap U_2, U_1}(f) = \operatorname{res}_{\emptyset, U_1}(f) = 0)$.

2) $\operatorname{nil}(A) = \bigcap_{p \in \operatorname{Spec} A} p \subseteq p \;\; \forall p \trianglelefteq A$ πρώτο $\Rightarrow V(\operatorname{nil}(A)) = X$.

Έστω ότι $\exists\, a, b \trianglelefteq A$ ώστε $X = V(a) \cup V(b)$, τότε $X = V(a \cap b)$ και

$$\sqrt{a} \cap \sqrt{b} = \Big(\bigcap_{\substack{p \supseteq a \\ p \in \operatorname{Spec} A}} p\Big) \cap \Big(\bigcap_{\substack{p \supseteq b \\ p \in \operatorname{Spec} A}} p\Big) = \bigcap_{p \in \operatorname{Spec} A} p = \operatorname{nil}(A)$$

Αν $nil(A)$ πρώτο ιδεώδες, τοτε $\sqrt{a} = nil(A) = \sqrt{0}$ ή $\sqrt{b} = \sqrt{0}$ | $\Rightarrow X = V(a)$ ή $V(b)$

Έστω τώρα ότι $nil(A)$ όχι πρώτο, τοτε
$\exists x, y \in A$ τω $x, y \notin nil(A)$, αλλά $xy \in nil(A)$

Ορίζουμε τα ιδεώδη
$$a = \langle x, nil(A) \rangle \quad \text{και} \quad b = \langle y, nil(A) \rangle$$

Έχουμε οτι $V(a) \neq X \neq V(b)$, καθώς $nil(A) \subsetneq a \Rightarrow \exists P$ τω $a \notin P$.

Καθώς $a \cap b = nil(A) \Rightarrow X = V(a) \cup V(b)$
$\Rightarrow X$ μη ανάγωγο.

(3) Έστω $A = \mathcal{O}_X(X)$

X reduced $\Leftrightarrow \mathcal{O}_X(U)$ δεν εχει μηδενοδύναμα $\forall U \subseteq X$ ανοιχτο
$\Leftrightarrow A$ reduced
$\Leftrightarrow nil(A) = \{0_A\}$

Αντίστροφα, αν $nil(A) = \{0_A\}$, τοτε το A δεν έχει μηδενοδύναμα στοιχεία. Για τυχαίο $f \in A$, ο A_f δεν έχει μηδενοδύναμα

Πράγματι, αν $\frac{a}{f^m} \in A_f$ μηδενοδύναμο, τοτε $\exists l \in \mathbb{N}$ ω $a^m f^l = 0$

$m < l \Rightarrow (af)^l = 0 \Rightarrow af = 0$

$m > l \Rightarrow (af)^m = 0 \Rightarrow af = 0$

Και άρα $\frac{a}{f^m} = \frac{af}{f^{m+1}} = 0$

Εξ ορισμού του sheaf δομής για το ανοιχτο $U \subseteq X$, το $\mathcal{O}_X(U)$ δεν έχει μηδενοδ.

(4) Αν το X είναι ακέραιο, τότε $\mathcal{O}_X(U)$ ακέραιο $\forall U \subseteq X$ ανοιχτό $\Rightarrow A = \mathcal{O}_X(X)$ ακ. περ.

Αν A ακ. περιοχή, τοτε $\mathcal{O}_X(U) \subseteq Quot(A) \Rightarrow \mathcal{O}_X(U)$ ακ. περιοχή. ∎

ΜΑΘΗΜΑ 16° 27/11

Λήμμα: Έστω X ανάγωγο, τότε κάθε μη-κενό ανοικτό υποσύνολο του X είναι πυκνό και ανάγωγο.

Απόδειξη:

Έστω $V \subseteq X$ ανοικτό και $\overline{V}$ η κλειστότητά του στο X, τότε

$$X = (X \setminus V) \cup \overline{V}$$

Λόγω αναγωγιμότητας έχουμε ότι $\overline{V} = X$. Τέλος, αφού X ανάγωγο και (η τομή 2 μη κενών ανοικτών $\subseteq V$ είναι μη κενή), καθώς είναι πυκνό).

Στα αλγεβρικά σύνολα δεν έχω μικρά ανοικτά, δηλ όλα είναι πυκνά

Πρόταση: Ένα σχήμα X είναι ακέραιο $\iff$ είναι ανηγμένο και ανάγωγο.

Απόδειξη:

Ακέραιο $\Rightarrow$ ανάγωγο ✓

~~Θδο~~ X ακέραιο $\Rightarrow$ X ανηγμένο. Έστω ότι δεν ισχύει, τότε $\exists F_1, F_2$ κλειστά τω

$$X = F_1 \cup F_2$$

Ορίζουμε $U_1 = X \setminus F_2 = F_1 \setminus (F_1 \cap F_2)$

$U_2 = X \setminus F_1 = F_2 \setminus (F_1 \cap F_2)$

Άρα, U_1, U_2 ανοικτά στο X με $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ και $U_1 \cap U_2$ ανοικτό

Συνεπώς,

$$\mathcal{O}_X(U) = \underbrace{\mathcal{O}_X(U_1)}_{f} \times \underbrace{\mathcal{O}_X(U_2)}_{f_2}$$

όχι ακεραίας περιοχή $(0,1)(1,0) = (0,0)$

Άρα, άτοπο και το X είναι ανηγμένο.

Αντίστροφα: Έστω X ανηγμένο και ανάγωγο. Θδο X ακέραιο.

Έστω U ανοικτό και $f \cdot g = 0$ στο $\mathcal{O}_X(U)$. τω $f, g \notin \mathcal{O}_X(U)$

(Θεωρούμε προς άτοπο, ότι ~~X~~ όχι ακέραιο)

Θέτουμε $F_1 = \{x \in U \mid f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$

$F_2 = \{x \in U \mid g(x) = 0\} = g^{-1}(\{0\})$ > κλειστά

Έστω ~~[illegible]~~ $\operatorname{Spec} R = V$ ένα αφινικό σύνολο του $V \subseteq U$ τω οι εικόνες $res|_V(f) = \hat{f}$ και $res|_V(g) = \hat{g}$ ικανοποιούν την συνθήκη $F_1 \cap V = V(\hat{f})$ και $F_2 \cap V = V(\hat{g})$

(?)

Επίσης, $fg=0 \Rightarrow U = F_1 \cup F_2 \xrightarrow{\text{ι ανάγωγο}} U=F_1$ ή $U=F_2$

Αν $U=F_1$: για το $V \subseteq U$ ισχύει ότι $V = V(\hat{f})$

Θυμόμαστε ότι για $0 = X_0 \supset X_{\hat{f}} \Rightarrow \hat{f} \in \sqrt{0} \Rightarrow \hat{f}$ μηδενοδύναμο στο $R = \mathcal{O}_X(V)$

Καθώς το X είναι ανηγμένο, $\sqrt{0}=0 \Rightarrow \hat{f}=0$

Δηλ. το f είναι 0 αν περιοριστεί σε αφινικό κάλυμμα του U, άρα από ιδιότητα του sheaf $f=0$. ∎

Ορσ: Έστω X σχήμα και $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, $U_i = \mathrm{Spec} R_i$ μία αφινική κάλυψη του X.

Αν κάθε δακτύλιος R_i είναι Noetherian, τότε το X λέγεται τοπικά Noetherian

Το X λέγεται Noetherian αν είναι τοπικά Noetherian και ημισυμπαγής (δηλ ∃ I πεπερ.).

Ιδιότητες Μορφισμών

Ορσ: 1) Έστω $f: X \to Y$ μορφισμός σχημάτων και $\{U_i = \mathrm{Spec} A_i\}_{i \in I}$ ένα αφινικό κάλυμμα του Y. Αν κάθε $f^{-1}(U_i)$ έχει ένα αφινικό κάλυμμα $\{V_{ij} = \mathrm{Spec} A_{ij}\}_{j \in J_i}$ των A_{ij}: πεπερ. παραγ. A_i-άλγεβρες, τότε το f θα λέγεται τοπικά πεπερασμένου τύπου

2) Η f θα λέγεται πεπερ τύπου αν το $f^{-1}(U_i)$ έχει πεπερ αφινικό κάλυμμα όπως στο (1)

3) Ένας μορφισμός $f: X \to Y$ λέγεται πεπερασμένος μορφισμός αν ικανοποιείται η ακόλουθη ισχυρότερη συνθήκη:

∃ αφ. κάλυμμα $\{\mathrm{Spec} A_i\}_{i \in I}$ του Y ώστε κάθε $f^{-1}(U_i)$ να είναι κάποιο αφινικό ανοιχτό $\mathrm{Spec} B_i$ που είναι πεπερ παραγ A_i-module (και άρα πεπερ παραγ A_i-άλγεβρα)

(*) Πεπερασμένος μορφισμός $\Longrightarrow$ μορφισμός πεπερ. τύπου

ΔΕΝ ισχύει το αντίστροφο

Πχ) $f(x,y) = (y^2-(x^5+6x^4+7x+1)) \in k[x,y]$ και θεωρούμε τον κανονικό μορφισμό

$$k[x] \longrightarrow k[x,y]/\langle f(x,y)\rangle$$

που επάγει στο $k[x,y]/\langle f(x,y)\rangle$ δομή $k[x]$-module.
Ακόμη, ορίζεται ένας μορφισμός σχημάτων

$$\Phi = \underbrace{\operatorname{Spec}\frac{k[x,y]}{\langle f(x,y)\rangle}}_{X} \xrightarrow{(\phi,\phi^{\#})} \operatorname{Spec} k[x] = \mathbb{A}^1$$

Η πρώτη συνάρτηση επάγει μία ππ $k[x]$-module δομή στο $k[x,y]/\langle f(x,y)\rangle$.
Πράγματι, αν $\bar{y}$ η κλάση του y στο $k[x,y]/\langle f(x,y)\rangle$, τότε

$$k[x,y]/\langle f(x,y)\rangle \cong k[x] \oplus k[x]\bar{y}.$$

Άρα,
Φ πεπερ μορφισμός + X πεπερ τύπου υπερ το k

Λίγα Πράγματα για Επιφάνειες Riemann

Ο Riemann προσπάθησε να υπολογίσει τα ολοκληρώματα της μορφής

$$\int \frac{1}{\sqrt{f(x)}}\,dx$$

και κοίταξε το $y^2 = f(x)$ → με αλλαγή μεταβλητών

(*) Θα μπορούσα να είχα και το $x^n+y^n=1$, που έχει σχέση με την εξίσωση του Fermat

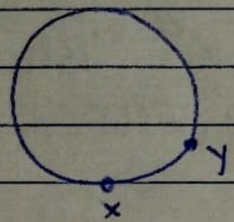
Θεωρούμε την αλγεβρική καμπύλη $V(y^2-f(x)) \subseteq \mathbb{A}^2$ και έχουμε την εξής κατάσταση

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}(x)[\sqrt{f(x)}] \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \mathbb{C}[x](\sqrt{f(x)}) \arrow[d, dash] \\
\mathbb{C}(x) \arrow[r, dash] & \mathbb{C}[x]
\end{tikzcd}$$

Μπορεί κανείς να θεωρήσει μία ∂ Galois για τις μερόμορφες συναρτήσεις πάνω από μία επιφάνεια Riemann

ΥΠΟΣΧΗΜΑΤΑ

πχ) $x^2+y^2=1$



Ο κύκλος είναι $\mathbb{R}$δx με όχι κανονικό τρόπο.
Είναι μήπως υπόχωρος;
θέλω μία τοπολογία που να "κληρονομείται" από την μεγάλη τοπολογία (embeding)

Ορσ: Έστω U ανοικτό του X, $(X, \mathcal{O}_X)$ σχήμα και $(U, \mathcal{O}_{X|U})$ → το έχουμε ορίσει ανοικτό υποσχήματα του X. Έστω $(g, g^\#): Z \to X$ μορφισμός σχημάτων, αν η $g: Z \to X$ είναι ομοιομορφισμός $g: Z \to g(Z) = U$ και ο περιορισμός
$$g^\#|_U : \mathcal{O}_{X|U} \to g_* \mathcal{O}_Z$$
ισομορφισμός sheaves, τότε η $(g, g^\#)$ θα ονομάζεται open immersion και το σχήμα Z ταυτίζεται με ανοικτό υποσχήμα $(U, \mathcal{O}_{X|U})$

Ορσ: Έστω X, Y σχήματα και $(i, i^\#): Y \to X$ μορφισμός σχημάτων, όπου Y κλειστός υπόχωρος του X (ως τοπολ χώροι), $i: Y \to X$ embeding και
$$i^\#: \mathcal{O}_X \to i_* \mathcal{O}_Y$$
επιμορφισμός sheaves, τότε το ζεύγος $(Y, (i, i^\#))$ θα λέγεται κλειστό υποσχήμα του X
→ ορίζεται locally στα φύτρα

πχ) $f: V(x^2+y^2-1) \to \mathbb{A}^2$
Έχουμε επιμορφισμό $k[x,y] \to k[x,y]/\langle f(x,y)\rangle$
άρα ο μοναδιαίος κύκλος είναι ένα κλειστό υποσχήμα του $\mathbb{A}^2$

Γενίκευση
πχ) Έστω $I \trianglelefteq R$ και $V(I)$ κλειστό στο $\mathrm{Spec}\, R$, τότε το $V(I)$ είναι ομοιομορφικό με τον τοπολ χώρο $\mathrm{Spec}(R/I)$
Ο φυσικός επιμορφισμός $R \to R/I$ επάγει μορφισμό σχημάτων
$$f: Y = \mathrm{Spec}(R/I) \to \mathrm{Spec}\, R = X$$

Η f επάγει τον ομοιομορφισμό ~~...~~ $\mathrm{Spec}(R/I) \to V(I)$
και για τυχαίο $P \in \mathrm{Spec}\, R$ έχουμε ότι

$$\left(\mathcal{O}_{X,P} \longrightarrow (f_*\mathcal{O}_Y)_P\right) \equiv \left(R_P \longrightarrow (R/I)_P\right)$$

Δηλ. η συνάρτηση των sheaves $\mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Y$ είναι επί
Άρα, (Y, f) κλειστό υποσχήμα του X η $f: Y \to X$ είναι κλειστή immersion

! Μπορεί να έχω $V(I)=V(J)$ ως κλειστά υποσύνολα (δηλ $\sqrt{I}=\sqrt{J}$),
όμως να ισχύει ότι $\mathrm{Spec}(R/I) \neq \mathrm{Spec}(R/J)$
καθώς μπορεί να έχω διαφορετικά δομικά sheaves, ~~π.χ.~~

$$\left(\mathrm{Spec}\,\frac{k[x]}{\langle x^2\rangle}, \mathcal{O}_{\frac{k[x]}{\langle x^2\rangle}}\right) \neq \left(\mathrm{Spec}\,\frac{k[x]}{\langle x\rangle}, \mathcal{O}_{\frac{k[x]}{\langle x\rangle}}\right)$$

έχει nilpotent → σημείο και απειροστή γειτονιά

δεν έχει nilpotent → σκέτο σημείο

έχαμε $k[x] \longrightarrow k[x]/\langle x^n\rangle$ και κλειστές immersions $\mathrm{Spec}\,\frac{k[x]}{\langle x^n\rangle} \longrightarrow \mathrm{Spec}\, k[x]$

Τη Δευτέρα θα δούμε θεωρία κατηγοριών για να κάνουμε ινώδη γινόμενα