ΜΑΘΗΜΑ 17ο 02/12

ΚΕΦ 4 : ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΚΑΙ ABSTRACT NONSENSE

Ορσ: Μια κατηγορία $\mathcal{C}$ αποτελείται από
- μια κλάση αντικειμένων $obj(\mathcal{C})$
- για κάθε δύο αντικείμενα A,B μία κλάση μορφισμών $Hom(A,B)$ τω
  (i) $\forall X \in Obj(\mathcal{C})$ $\exists id_X \in Hom(X,X)$ ο ταυτοτικός μορφισμός
  (ii) $\forall X,Y,Z \in Obj(\mathcal{C})$ $\exists$ συνάρτηση (συνολοθεωρητική) που ονομάζουμε σύνθεση μορφισμών

$$Hom(Y,Z) \times Hom(X,Y) \longrightarrow Hom(X,Z)$$
$$(g,f) \longmapsto g \circ f$$

τω αν $f: A \to B$, $g: B \to C$ και $h: C \to D$ μορφισμοί, τότε

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

  (iii) $\forall f \in Hom(A,B)$ έχουμε ότι $f \circ id_A = id_B \circ f = f$

Κομπιουτεράκιδες → η applied category theory κερδίζει την μάχη έναντι των γραφημάτων

(*) Τα $obj(\mathcal{C})$ και $Hom(X,Y)$ είναι κλάσεις και όχι απαραίτητα σύνολα. Αν είναι σύνολα μιλάμε για μικρή κατηγορία, ενώ αν μόνο οι μορφισμοί $Hom(X,Y)$ είναι σύνολα για τοπικά μικρή κατηγορία
↳ κλάση και όχι σύνολο

πχ 1) (Set): η κατηγορία των συνόλων με $Obj(Set) =$ σύνολα και μορφισμούς τις συνολοθεωρητικές απεικονίσεις

2) (Ring): η κατηγορία των μεταθ. δακτυλίων με $Obj(Ring) =$ μεταθετικοί δακτ. και μορφισμούς τους ομομορφισμούς δακτυλίων

3) (RMod): η κατηγορία των αριστερών προτύπων με $Obj(RMod) =$ αριστερά πρότυπα και μορφισμούς τους ομομορφισμούς R-αριστερών module.
παράδειγμα αβελιανής κατηγορίας → μπορώ να κάνω ομολογική άλγεβρα

(*) Κάποια αντικείμενα βρίσκονται σε πολλές κατηγορίες, π.χ.

$$\mathrm{obj}(R\mathrm{Mod}) \subsetneq \mathrm{obj}(\mathrm{Group}) \subsetneq \mathrm{Obj}(\mathrm{Set})$$

Ορ: Ένα διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & B \arrow[d, "v"] \\ C \arrow[r, "g"'] & D \end{tikzcd}$$

θα ονομάζεται μεταθετικό αν $v \circ f = g \circ u$.

(*) Μπορεί κανείς να ορίσει την κατηγορία των κατηγοριών

Ορ: Έστω $\mathcal{C}$ και $\mathcal{D}$ δύο κατηγορίες, ένας συναρτητής $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ αντιστοιχίζει:

- κάθε C στο $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ σε ένα $F(C) = D$ στο $\mathrm{obj}(\mathcal{D})$
- κάθε $f: C \to C'$ μορφισμό της $\mathcal{C}$ σε έναν $F(f): D \to D'$ μορφισμό της $\mathcal{D}$ τω

  (i) $\forall x$ στην $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ $F(id_x) = id_{F(x)}$

  (ii) κάθε διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & C' \arrow[d, "g"] \\ & C'' \end{tikzcd}$$

Επάγει μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "Ff"] \arrow[dr, "F(g \circ f)"'] & D' \arrow[d, "Fg"] \\ & D'' \end{tikzcd}$$

Αν στα παραπάνω έχουμε $f: C \to C'' \Rightarrow Ff: F(C) \to F(C')$, τότε ο συναρτητής ονομάζεται συναλλοίωτος (covariant), ενώ αν ισχύει $f: C \to C' \Rightarrow Ff: F(C') \to F(C)$ ο συναρτητής ονομάζεται ανταλλοίωτος (contravariant)

ο contravariant αλλάζει φορά στα βέλη

Ορ. Έστω $\mathcal{C}$ κατηγορία, ονομάζουμε δυϊκή κατηγορία της $\mathcal{C}$ μια κατηγορία $\mathcal{C}^{op}$ με $Obj(\mathcal{C}^{op}) = Obj(\mathcal{C})$ και για κάθε A, B στον $obj(\mathcal{C}^{op})$ έχουμε ότι $Hom_{\mathcal{C}^{op}}(A,B) = Hom_{\mathcal{C}}(B,A)$.

(*) Ένας contravariant συναρτητής $F: \mathcal{C} \to D$ είναι στην ουσία ένας covariant συναρτητής $F: \mathcal{C}^{op} \to D$

"Οριζόντια Σύνθεση Συναρτητών"

Θεωρούμε τους συναρτητές $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ και $G: \mathcal{D} \to \mathcal{E}$, τότε μπορούμε να ορίσουμε την σύνθεση των συναρτητών

$$G \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$$

όπου αντιστοιχεί τα αντικείμενα

$$Obj(\mathcal{C}) \longrightarrow Obj(\mathcal{E})$$
$$x \longmapsto F(x) \longrightarrow G(F(x))$$

και τους μορφισμούς

$$f: c \longrightarrow c' \qquad (\mathcal{C})$$
$$\downarrow$$
$$Ff: F(c) \longrightarrow F(c') \qquad (\mathcal{D})$$
$$\downarrow$$
$$G \circ F(f) = G(F(c)) \to G(F(c')) \qquad (\mathcal{E})$$

"Κάθετη Σύνθεση Συναρτητών"

Έστω $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ κατηγορίες και $F, G: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ συναρτητές. Ένας φυσικός μετασχηματισμός (natural transformation) $\eta: F \to G$ είναι μία οικ. μορφισμών $\{\eta_c : F(c) \to G(c)\}$ τω $\forall f: c \to c'$ μορφισμό της $\mathcal{C}$ το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd}
F(c) \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "\eta_c"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & F(c') \arrow[d, "\eta_{c'}"] \\
G(c) \arrow[r, "Gf"'] & G(c')
\end{tikzcd}$$

δηλ $\eta_{c'} \circ F_f = G_f \circ \eta_c$

Θα συμβολίζουμε τον φυσικό μετασχηματισμό η ως

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \eta"] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

(*) Αν $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ κατηγορίες, τότε μπορώ να θεωρήσω την κατηγορία $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ με αντικείμενα τους συναρτητές $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ και μορφισμούς τους φυσικούς μετασχηματισμούς μεταξύ των συναρτητών

πχ (1) Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι, $x \in X$ και $f : X \to Y$ συνεχής, τότε από αλγεβρική τοπολογία $\exists$ ομομορφισμός ομάδων f^* που κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_1"'] & Y \arrow[d] \\ \pi_1(X,x) \arrow[r, "f^*"'] & \pi_1(Y, f(x)) \end{tikzcd}$$

$(X,x) \xrightarrow{f} (Y, f(x))$

Εδώ έχουμε την κατηγορία τοπολογικών χώρων με ένα σημείο (X,x) και τις συνεχής απεικονίσεις μεταξύ τους και τον συναρτητή της 1ης θεμελιώδους ομάδας π_1 με $\pi_1(f) = f^*$

(2) Έστω X τοπολ χώρος, τότε ορίζω την κατηγορία $Top(X)$ με αντικείμενα $Obj(Top(X)) = \{U \subseteq X \mid U \text{ ανοιχτό}\}$ και μορφισμούς

$$Hom(U,V) = \begin{cases} i_{V,U} : U \hookrightarrow V & \text{αν} \\ \emptyset & \text{αν } U \not\subseteq V \end{cases}$$

Ένα presheaf αβελιανών ομάδων είναι ένας contravariant συναρτητής

$$G : Top(X) \longrightarrow (Ab)$$

τω 1) $\forall U \in Obj(Top(X))$ $G(U)$ αβελιανή ομάδα

2) $\forall U \subseteq V$ επάγεται ομομορφισμός ομάδων

$$G(i_{V,U}) = \rho_{V,U} : G(V) \longrightarrow G(U)$$

Ένας μορφισμός sheaf είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός μεταξύ δύο συναρτητών sheaf

$$\begin{array}{ccc} G(U) & \xrightarrow{res|_V} & G(V) \\ \downarrow{\scriptstyle \eta(U)} & & \downarrow{\scriptstyle \eta(V)} \\ F(U) & \xrightarrow[res|_V]{} & F(V) \end{array}$$

Ορσ. Έστω $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ και $G: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ συναρτητές τω

$$G \circ F \cong Id_{\mathcal{C}} \quad \text{και} \quad F \circ G \cong Id_{\mathcal{D}}$$

Τότε οι κατηγορίες ονομάζονται ισοδύναμες.
Αν ο F είναι contravariant, τότε οι κατηγορίες ονομάζονται αντιισοδύναμες.

Εδώ το $G \circ F \cong Id_{\mathcal{C}}$ σημαίνει ότι υπάρχει φυσικός μετασχ. η που αποτελείται από μορφισμούς $\{\eta_c : G \circ F(c) \to Id_{\mathcal{C}}(c)\}$ οι οποίοι είναι ισομορφισμοί.
↳ αυτό δεν σημαίνει 1-1 και επί, αλλά $\forall \eta_c \ \exists \eta_c^{-1}$ τω

$$\eta_c \circ \eta_c^{-1} = Id_{G \circ F(c)}$$

και $\eta_c^{-1} \circ \eta_c = Id_{Id_{\mathcal{C}}(c)}$

Θεώρημα: Θεωρούμε τον contravariant συναρτητή F από την κατηγορία των αντιμεταθετικών δακτυλίων στην κατηγορία των αφινικών σχημάτων που δίνεται από την αντιστοιχία αντικειμένων

$$F(R) = (\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}) \quad \forall R \in Ob(Ring)$$

και την αντιστοιχία μορφισμών

$$F(\phi): \phi^a : \operatorname{Spec} S \to \operatorname{Spec} R \quad \forall \phi : R \to S$$

Τότε ο F ορίζει μια ισοδυναμία κατηγοριών.

$$F(\phi) \longrightarrow (\phi^a, \phi^\#)$$

Απόδειξη:

Ορίζουμε τον contravariant συναρτητή $G: (Af.Sch) \to (Ring)$ με
$$G((X,\mathcal{O}_X)) = \Gamma(X,\mathcal{O}_X)$$
για κάθε αφινικό σχήμα $(X,\mathcal{O}_X)$ και για μορφισμό $(f,\theta):(X,\mathcal{O}_X)\to(Y,\mathcal{O}_Y)$
$$G(f,\theta) := \Gamma(Y,\mathcal{O}_Y) \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{O}_X) = \Gamma(*, f_*\mathcal{O}_X)$$
Από τους ορισμούς των αφινικών σχημάτων βλέπουμε ότι
$$G(F(R)) = G(\operatorname{Spec}R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}R}) = \Gamma(\operatorname{Spec}R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}R})$$
$$= \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}R}(\operatorname{Spec}R) = R$$
και για $\phi: R \to S$ έχουμε ότι
$$G(F(\phi)) := \Gamma(\operatorname{Spec}R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}R}) \longrightarrow \Gamma(\operatorname{Spec}S, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}S})$$
$$R \longrightarrow S$$
από τον ορισμό $\phi^\#$ έχουμε ότι ταυτίζεται με το ϕ, καθώς
$$F(\phi) := \phi^a : \operatorname{Spec}S \longrightarrow \operatorname{Spec}R$$
και άρα
$$G(F(\phi)) = G(\phi^a,\phi^\#) : \Gamma(\operatorname{Spec}R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}R}) \longrightarrow \Gamma(\operatorname{Spec}S, \phi^a_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}S}) = \Gamma(\operatorname{Spec}S, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}S})$$
$$\overset{\shortparallel}{\phi} : \quad R \longrightarrow S$$
Συνεπώς, $G\circ F = Id_{(Ring)}$.

Αντίστροφα, δδο $F\circ G = Id_{(Af.Sch)}$.

Προφανώς, έχουμε ότι αν $(X,\mathcal{O}_X)$ affine scheme, τότε
$$G(X,\mathcal{O}_X) = \Gamma(X,\mathcal{O}_X) \text{ και } F(G(X,\mathcal{O}_X)) = F(\Gamma(X,\mathcal{O}_X))$$
$$= (\operatorname{Spec}\Gamma(X,\mathcal{O}_X), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}\Gamma(X,\mathcal{O}_X)})$$
Καθώς $(X,\mathcal{O}_X)$ affine scheme έχουμε ότι $X \cong \operatorname{Spec}R$ για κάποιο R
και άρα $\Gamma(X,\mathcal{O}_X) = R$
$$F(G(X,\mathcal{O}_X)) = (\operatorname{Spec}R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}R}) = (X,\mathcal{O}_X)$$
Επίσης, αν έχουμε μορφισμό
$$(f,\theta) : (Z,\mathcal{O}_Z) \longrightarrow (\operatorname{Spec}R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}R})$$
τότε ο θ επάγει μορφισμό δακτυλίων
$$\theta : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}R} \longrightarrow f_*\mathcal{O}_Z$$
$$\Rightarrow \theta(\operatorname{Spec}R) : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}R}(\operatorname{Spec}R) \longrightarrow f_*\mathcal{O}_Z(\operatorname{Spec}R) = \mathcal{O}_Z(f^{-1}(\operatorname{Spec}R))$$
$$\Rightarrow \theta(\operatorname{Spec}R) : R \longrightarrow \mathcal{O}_Z(Z) = Z$$
Για ένα τυχαίο $z \in Z$ έχουμε την κανονική συνάρτηση
$$\nu_z : \Gamma(Z,\mathcal{O}_Z) \longrightarrow \mathcal{O}_{Z,z}.$$

και από την επόμενη πρόταση έχουμε ότι $F \circ G = \mathrm{Id}_{(\mathrm{Aff.Sch})}$ ■

επάγει την ϕ

Πρόταση: Έστω ο μορφισμός $(f,\partial):(Z,\mathcal{O}_Z)\longrightarrow(\mathrm{Spec}R,\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R})$, έχουμε ότι $f(z)=\phi_z^{-1}(m_z)$, $z\in Z$, $m_z \trianglelefteq \mathcal{O}_{Z,z}$ μεγιστικό και μάλιστα $\phi_z = v_z\circ\phi$.
Επίσης,

$v_z:\Gamma(Z,\mathcal{O}_Z)\to\mathcal{O}_{Z,z}$ $\quad$ $\phi: R\to\Gamma(Z,\mathcal{O}_Z)$

$$\mathrm{Hom}_{(\mathrm{Sch})}(Z,\mathrm{Spec}R)\cong \mathrm{Hom}_{(\mathrm{Ring})}(R,\Gamma(Z,\mathcal{O}_Z)).$$

Απόδειξη:
Έστω ότι $f(z)=\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}R$, τότε ο ∂ επάγει ομομορφισμός

$$\partial_{\mathfrak{p}}:\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R,\mathfrak{p}}\longrightarrow\mathcal{O}_{Z,z}$$
$$\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R,\mathfrak{p}} = R_{\mathfrak{p}}$$

μεγιστικό στο $R_{\mathfrak{p}}$

που είναι τοπικός (δηλ. $\partial_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}})\subseteq m_z$). Συνεπώς, $\partial_{\mathfrak{p}}^{-1}(m_z)=\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$.
Θεωρούμε την κανονική εμφύτευση του εντοπισμού

$$\psi: R\longrightarrow R_{\mathfrak{p}}$$

και τότε η σύνθεση

$$R\xrightarrow{\psi}R_{\mathfrak{p}}\xrightarrow{\partial_{\mathfrak{p}}}\mathcal{O}_{Z,z}$$

ταυτίζεται με την ϕ_z, δηλ. $\phi_z=\partial_{\mathfrak{p}}\circ\psi$.

$$\begin{tikzcd}
 & R_{\mathfrak{p}} \arrow[dr, "\partial_{\mathfrak{p}}"] & \\
R \arrow[ur, "\psi"] \arrow[dr, "\phi"'] \arrow[rr, phantom, "\circlearrowright"] & & \mathcal{O}_{Z,z} \\
 & \Gamma(Z,\mathcal{O}_Z) \arrow[ur, "v_z"'] &
\end{tikzcd}$$

(*) οι συναρτήσεις εντοπισμού προκύπτουν από σχέσεις περιορ. στα sheaves

■

ΜΑΘΗΜΑ 18ο — 04/12/24

Συνέχεια της απόδειξης:

Δείξαμε ότι ένας $(f,\theta)\in \mathrm{Hom}_{(Sch)}(Z, \mathrm{Spec}\,R)$ επάγει ομομορφισμό δακτυλίων μέσω του μορφισμού των sheaves

$$\phi: R \longrightarrow \Gamma(Z,\mathcal{O}_Z)$$

Τώρα θα κάνουμε το ανάποδο!

Ξεκινάμε με έναν μορφισμό δακτυλίων $\phi: R \longrightarrow \Gamma(Z,\mathcal{O}_Z)$

από αυτή θα πάρουμε πληροφορία για μορφισμό σχημάτων $Z \to \mathrm{Spec}\,R$

Ορίζουμε την $f: Z \longrightarrow \mathrm{Spec}\,R : z \longmapsto \phi_z^{-1}(m_z)$

όπου για $z\in Z$ έχουμε $\nu_z: \Gamma(Z,\mathcal{O}_Z)\to \mathcal{O}_{Z,z}$ και $\phi_z = \nu_z\circ\phi$.

Για $m_z \trianglelefteq \mathcal{O}_{Z,z}$ το $\phi^{-1}(m_z)\trianglelefteq R$ πρώτο και άρα η f είναι καλά ορ.

Θδο η f είναι συνεχής.

Έστω $X_g = \{P\in \mathrm{Spec}\,R \mid g\notin P\}$ για $g\in R$ βάση ανοικτών του $\mathrm{Spec}\,R$.

Θδο $f^{-1}(X_g)$ ανοικτό

$$\begin{aligned}
\hookrightarrow f^{-1}(X_g) &= \{z\in Z \mid f(z)\in X_g\} \\
&= \{z\in Z \mid \phi_z^{-1}(m_z)\in X_g\} \\
&= \{z\in Z \mid g\notin \phi_z^{-1}(m_z)\} \\
&= \{z\in Z \mid \phi_z(g) = \nu_z\circ\phi(g)\notin m_z\} \\
&= \{z\in Z \mid \nu_z\circ\phi(g) \text{ αντιστρέψιμο στο } \mathcal{O}_{Z,z}\} \\
&= \{z\in Z \mid z\in V(\phi(g))^c\} \\
&= \{z\in Z \mid \phi(g)(z)\neq 0\} \quad \text{ανοικτό}
\end{aligned}$$

Άρα ο μορφισμός δακτυλίων που δίνεται από τον ορισμό του sheaf

$$\Gamma(Z,\mathcal{O}_Z) \longrightarrow \Gamma(f^{-1}(X_g),\mathcal{O}_Z) \cong \Gamma(X_g, f_*\mathcal{O}_Z)$$

παραγοντοποιείται ως εξής

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & \Gamma(Z,\mathcal{O}_Z) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(f^{-1}(X_g),\mathcal{O}_Z) \\
R_g \arrow[r, "\phi_g"'] & \Gamma(Z,\mathcal{O}_Z)_{\phi(g)} \arrow[ur, "\bar{\rho}_g"'] &
\end{tikzcd}$$

↳ $\phi(g)\neq 0$ αντιστρέψιμο

$\bar{\rho}_g$ → καθολική ιδιότητα εντοπισμού

$r/g^n \longmapsto \phi(r)/\phi(g)^n$

ο ομομορφισμός $\phi: R\to \Gamma(Z,\mathcal{O}_Z)$ επάγει $\phi_g : R_g \longrightarrow \Gamma(Z,\mathcal{O}_Z)_{\phi(g)}$ και θεωρούμε τη σύνθεση

$$\theta_g = \bar{\rho}_g\circ\phi_g : R_g \longrightarrow \Gamma(f^{-1}(X_g),\mathcal{O}_Z)$$

Επιλέγοντας διαφορετικά $g \in R$ μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν ομομορφισμό από sheaves

$$\partial_a : \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R} \longrightarrow \mathcal{O}_Z$$

Συμπεριλαμβάνοντα έχουμε

$$(f, \partial) : (Z, \mathcal{O}_Z) \longrightarrow (\mathrm{Spec}R, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R}) \qquad \blacksquare$$

Ορσ: Έστω S, X σχήματα και $S \xrightarrow{\varphi} X$ μορφισμός. Ο φ θα ονομάζεται σημείο με τιμές στο S (S-valued point).
Αν $S = \mathrm{Spec}R$, τότε θα το ονομάζουμε R-σημείο

πχ)
(1) $A = \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n] / \langle f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_e(x_1, \dots, x_n) \rangle$
και $\mathrm{Spec}\,A$ το αφινικό σχήμα
Για ένα σώμα k ένα k-valued pt

$$\phi : \mathrm{Spec}\,k \longrightarrow \mathrm{Spec}\,A$$

$\Updownarrow$ ισοδυναμεί

$$\phi : A \longrightarrow k \qquad \text{τω } \phi = \phi^a$$

$$\Updownarrow$$

$$\bar{\phi} : A/\ker\phi \longrightarrow k$$

πρώτο/μεγιστικό ιδεώδες του A

Αν $\begin{cases} \bar{x}_1 \equiv x_1 \bmod I \\ \vdots \\ \bar{x}_n \equiv x_n \bmod I \end{cases}$ και $a_j = \phi(\bar{x}_j)$, τότε καθώς ϕ ομομορφισμός

έχουμε ότι $\phi(f_i(x_1, \dots, x_n)) = f_i(\phi(x_1), \dots, \phi(x_n))$
$= f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$

Αντίστροφα, κάθε λύση του συστήματος $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ~~του~~ ορίζει μορφισμό

$$\phi : A \longrightarrow k$$

τω $\phi(\bar{x}_j) = a_j$ και ορίζουμε ~~[illegible]~~ scheme valued point

$$\phi^a : \mathrm{Spec}\,k \longrightarrow \mathrm{Spec}\,A$$

(2) Αν έχω $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ και $\begin{cases} f_1(x_1,\dots,x_n)=0 \\ \vdots \\ f_e(x_1,\dots,x_n)=0 \end{cases}$ σύστημα διοφαντικών εξισώσεων, τότε παίρνουμε $\mathbb{Z}$-σημείο

Ορσ: Αν k αλγ. κλειστό σώμα, τότε οι μορφισμοί $\operatorname{Spec}k \to X$ θα λέγονται γεωμετρικά σημεία

θα δούμε ότι τα σημεία $\operatorname{Spec} k[x]/\langle x^2\rangle \to X$ είναι η εφαπτόμενη δέσμη του X

πχ (3) Έστω $\mathcal{C}$ κατηγορία και Z στην $Obj(\mathcal{C})$, τότε ορίζουμε την κατηγορία $\mathcal{C}/Z$ με
- αντικείμενα: (X,p) των $X\in Obj(\mathcal{C})$ και $p\in Hom(X,Z)$
- μορφισμούς: $Hom_{\mathcal{C}/Z}((X,p),(Y,q))$ να είναι μορφισμοί $h\in Hom(X,Y)$ που κάνουν το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "q"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

Αν $\mathcal{C}=(Sch)$ γράφουμε (Sch/Z)

Ορσ: Έστω $\mathcal{C}$ κατηγορία και $A\in Obj(\mathcal{C})$.
1. το A λέγεται τελικό αντικείμενο αν κάθε $Hom_{\mathcal{C}}(X,A)$ είναι μονοσύνολο
2. το A λέγεται αρχικό αντικείμενο αν κάθε $Hom_{\mathcal{C}}(A,X)$ είναι μονοσύνολο

↳ μεταθέτουμε με 1

Πρόταση: Στην κατηγορία των δακτυλίων (Ring) το $\mathbb{Z}$ είναι αρχικό αντικείμενο.
Στην κατηγορία των σχημάτων (Sch), το $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ είναι τελικό αντικείμενο.

η απεικόνιση της 1 καθορίζει τον ομομορφ. μοναδικά θα απεικονίζεται στο 1_R

Απόδειξη:

1. $\forall R \in Obj(Ring)\ \exists!\ \mathbb{Z} \longrightarrow R : 1_{\mathbb{Z}} \longrightarrow 1_R$
2. Είδαμε ότι καθε $(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}})$ καθορίζεται ~~μοναδικά~~ απο ομομορφ δακτυλίων

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$$

που είναι μοναδικός. ∎

Σ) Παρατηρήσεις:

1) $(Sch/\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}) = (Sch)$ καθως το $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ είναι τελικό
2) $(Sch/\mathrm{Spec}\,k) \longrightarrow$ καθε $\mathcal{O}_X$-χώρος γίνεται k-άλγεβρα → περιορίζομαι

$$\exists\, \partial : \underset{\substack{\| \\ k}}{\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\,k}(\mathrm{Spec}\,k)} \longrightarrow \mathcal{O}_X(U)$$

θυμίζει καλυπτικές απεικονίσεις

Έστω $f : X \to Z$, τότε μπορεί κανείς να το δει αυτό ως οικογένεια σχημάτων με βαση το Z (περισσότερα στα ειδικά θέματα).

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΟΣ ΧΩΡΟΣ ZARISKI

Έστω $(X, \mathcal{O}_X)$ ringed space και $x \in (X, \mathcal{O}_X)$.
Ο $\mathcal{O}_{X,x}$ είναι τοπικος δακτύλιος φυσικα και άρα έχει μοναδικό μεγιστικό ιδεώδες (έστω m_x)
Ορίζαμε το πηλίκο m_x / m_x^2 που το ονομάζαμε συνεφαπτόμενο χωρο Zariski
Έχουμε και τον εφαπτόμενο χώρο που είναι $\mathcal{O}_{X,x}/m_x$-module
δηλ $k(x)$-module (διαν. χώρος)

πχ) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμες, τότε το $m_0 = \{$συναρτήσεις f με $f(0)=0\}$
$= \{x g(x)\} = \langle x \rangle$

τότε $m_0^2 \to f(0)=0$, $f'(0)=0$ και $m_0^3 \to f(0)=0$, $f'(0)=0$, $f''(0)=0$

Αυτό φαίνεται από σειρές Taylor

Στις συνεχείς συναρτήσεις m_x/m_x^2 τετριμμένο, καθώς υπάρχει η τετρ. ρίζα που είναι συνεχής $f \in m_x^2 \Rightarrow \sqrt{f} \in m_x$
Όμως η τετρ. ρίζα δεν είναι διαφορίσιμη, άρα m_x/m_x^2 μη τετριμμένο

Έχω, λοιπόν, $(T_xX)^* = m_x/m_x^2$ ο συνεφαπτόμενος χώρος.
Άρα, ο εφαπτόμενος θα είναι ο δυϊκός του

$$T_xX = \mathrm{Hom}_{k(x)}(T_xX^*, k(x)) = \mathrm{Hom}_{k(x)}(m_x/m_x^2, k(x))$$

Πρόταση: Υπάρχει μία 1-1 αντιστοιχία ανάμεσα στους μορφισμούς

$$\Phi := (\phi, \phi^\#) : \left(\mathrm{Spec}\, k[t]/\langle t^2\rangle, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\frac{k[t]}{\langle t^2\rangle}}\right) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$$

στην κατηγορία (Sch/k) και των εφαπτόμενων διανυσμάτων $\partial \in T_xX$.

δηλ. $\frac{k[t]}{\langle t^2\rangle}$-valued pb $\longleftrightarrow \partial \in T_xX$.

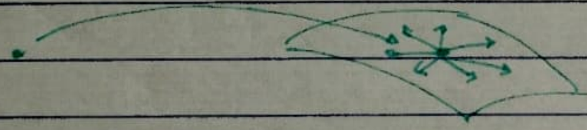
Παρατήρηση:
Τα $\mathrm{Spec}\frac{k[t]}{\langle t^2\rangle}$ και $\mathrm{Spec}\frac{k[t]}{\langle t\rangle}$ έχουν τα ίδια σημεία. (Τα σημεία βλέπουν το ρίζικο)

infinitesimals $\qquad$ ↳ Spec k

Δηλ. $\mathrm{Spec}\frac{k[t]}{\langle t^2\rangle}$ μονοσύνολο

(∗) Ο μορφισμός Φ μεταφέρει τη δομή της $k[t]/\langle t^2\rangle$ άλγεβρας στο $(X, \mathcal{O}_X)$.

$$\phi : \mathrm{Spec}\frac{k[t]}{\langle t^2\rangle} = \{x\} \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$$



Το απειροστό γεωμετρικά δίνει φύτρα που μπορώ να ανεχίσω σε κάθε κατεύθυνση

Άρα, τα $\frac{k[t]}{\langle t^2\rangle}$ σημεία είναι τα εφαπτόμενα διανύσματα