Συνδυαστική, Πεμ. 14/11.

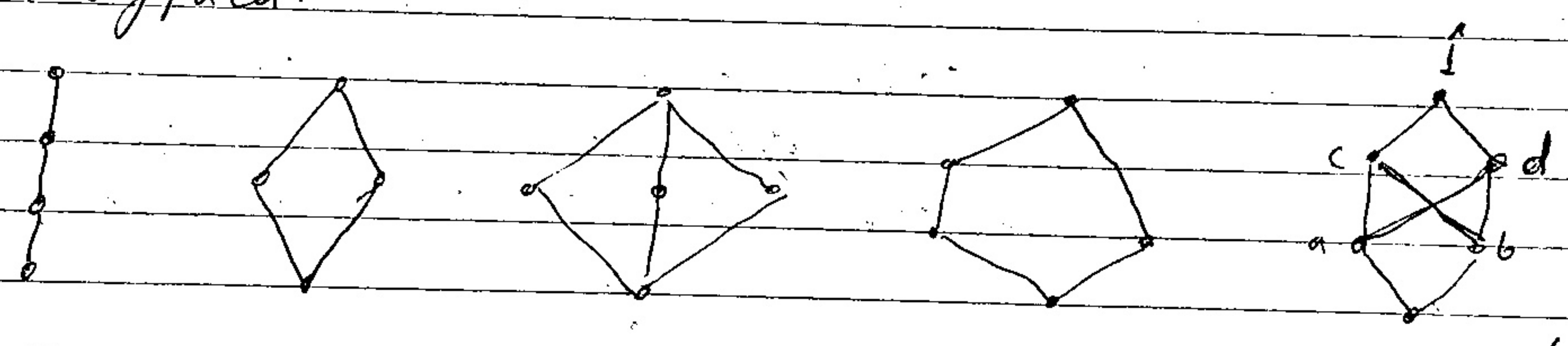
11. Σύνδεσμοι.

Έστω μερικώς διατεταγμένο σύνολο P, και $x,y \in P$. Ένα στοιχείο $z \in P$ λέγεται κατώτατο άνω φράγμα (ανώτατο κάτω φράγμα αντίστοιχα) των x,y αν $x,y \leq z$ ($z \leq x,y$), $z \leq w$ ($w \leq z$) για κάθε $w \in P$ με $x,y \leq w$ ($w \leq x,y$)

Αν υπάρχει τέτοιο $z \in P$, τότε είναι μοναδικό και συμβολίζεται με $x \vee y$ (aka join), $x \wedge y$ αντίστοιχα (aka)

Ορισμός 11.1: Το P λέγεται σύνδεσμος (lattice) αν κάθε ζεύγος στοιχείων $x,y \in P$ έχει κατώτατο άνω φράγμα και ανώτατο κάτω φράγμα.

Παραδείγματα:



όχι: a,b
δεν έχουν $a \vee b$
c,d -//- $c \wedge d$

Παραδείγματα 11.2: Κάθε αλυσίδα P είναι σύνδεσμος και $x \vee y = \max\{x,y\}$, $x \wedge y = \min\{x,y\}$.

Η B_n είναι σύνδεσμος, με
$$x \vee y = x \cup y, \quad x \wedge y = x \cap y$$
για $x,y \subseteq [n]$

Η μερ. διάταξη $L_n(q)$ είναι σύνδεσμος, με
$$x \vee y = x + y, \quad x \wedge y = x \cap y, \text{ για } x,y \in L_n(q)$$

Πρόταση 11.3.

a) Αν το P είναι πεπερασμένο, έχει μέγιστο στοιχείο $\hat{1} \in P$ και υπάρχει το $x \wedge y$ για όλα τα $x, y, \in P$, τότε το P είναι σύνδεσμος.

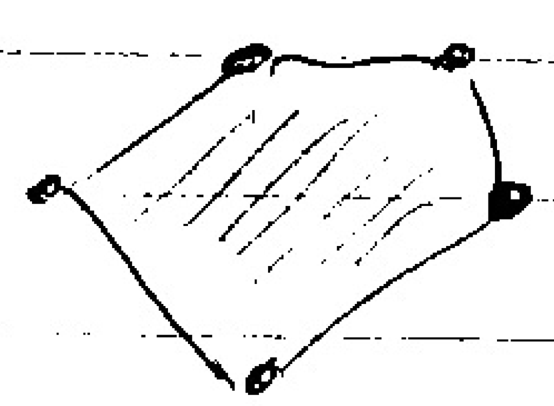
b) Ομοίως, αν το P έχει ελάχιστο στοιχείο $\hat{0} \in P$ και υπάρχει το $x \vee y$ για όλα τα $x, y \in P$.

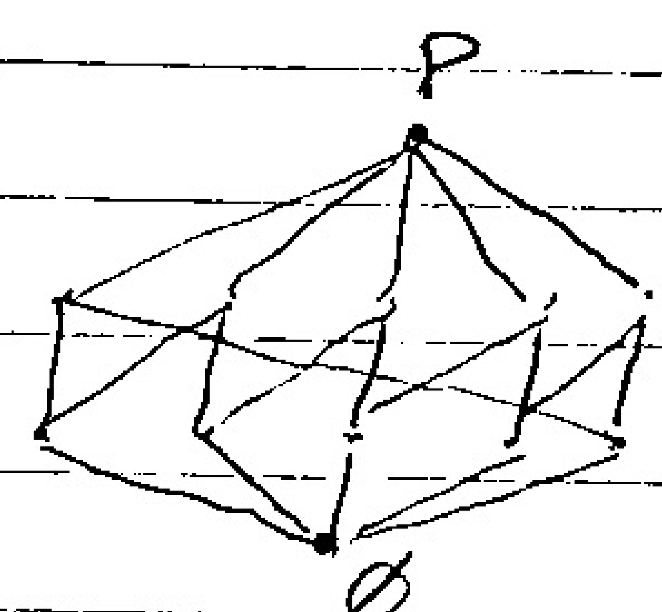
Απόδειξη

a) Με επαγωγή στο πλήθος των στοιχείων του S, δείχνουμε ότι υπάρχει το ανώτατο κάτω φράγμα $\wedge S$ για κάθε πεπερ. $S \subseteq P$, $S \neq \emptyset$.

Για $x, y \in P$ ορίζουμε ως $S = \{z \in P : x \leq z \wedge y \leq z\}$ και παρατηρούμε ότι $S \neq \emptyset$, αφού $\hat{1} \in P$. Παρατηρούμε, τέλος, ότι $\wedge S = x \vee y$.

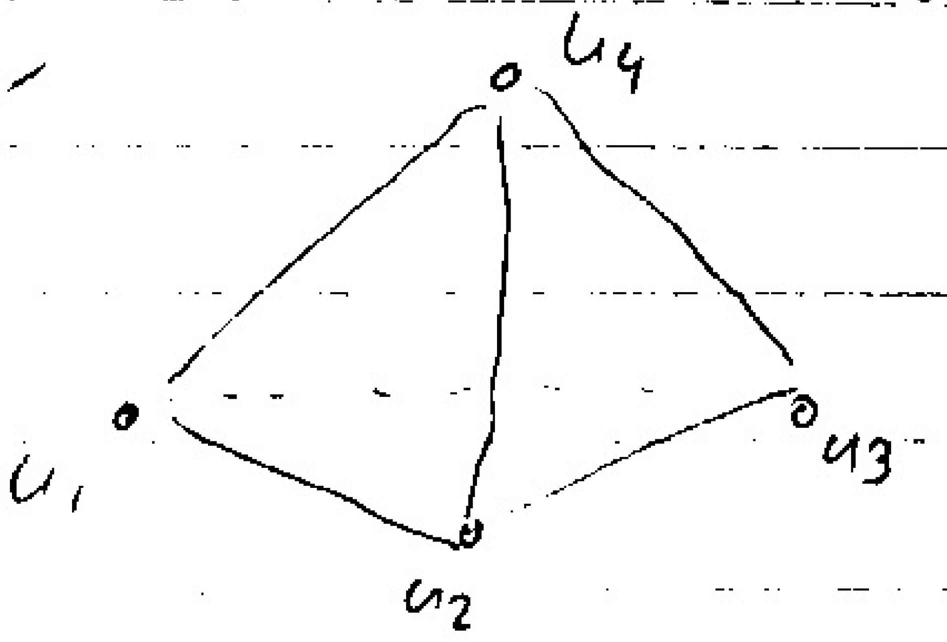
Παράδειγμα 11.4: Το σύνολο των πλευρών ενός κυρτού πολυγώνου (γενικότερα, κάθε κυρτού πολυτόπου διάστασης d) P, μερικώς διατ. με τη σχέση του εγκλεισμού, αποτελεί σύνδεσμο, ο οποίος λέγεται σύνδεσμος των πλευρών του P και συμβολίζεται με $L(P)$.

P 

$L(P)$ 

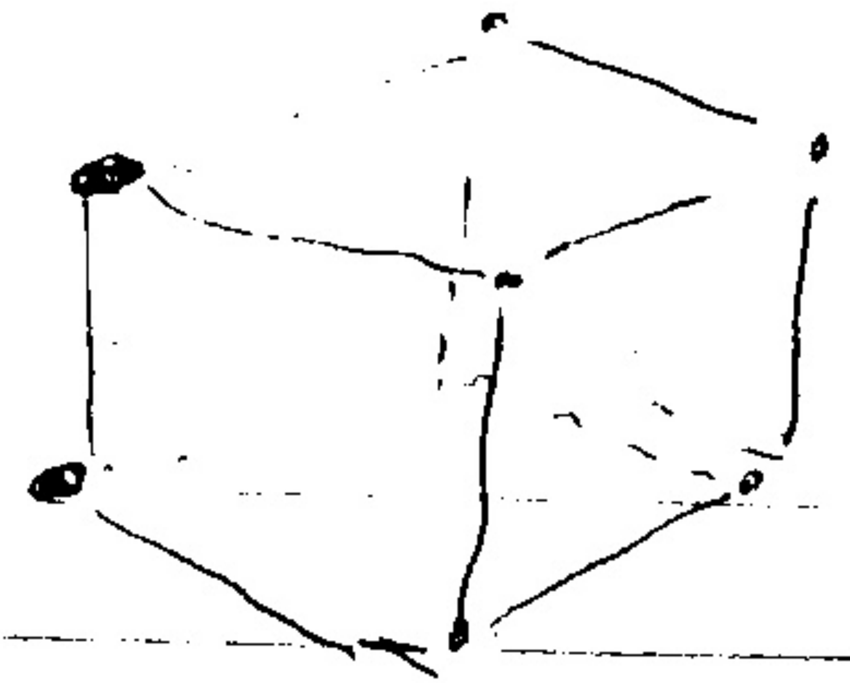
(οι 5 ακμές)
(οι 5 κορυφές)

Η 1η κορυφή περιέχεται στη 1η & 2η ακμή, η 2η -//- στη 2η & 3η κοκ

P 

$L(P) \cong B_4$

P



$L(P) = ?$

Έχουμε $\hat{0} = \emptyset$ και $\hat{1} = P$ στο $L(P)$.

Παράδειγμα 11.5:

Έστω $\mathcal{A} = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ σύνολο n γραμμικών υπερεπιπέδων (δηλαδή γραμμικών υπόχωρων διάστασης $d-1$) στον $\mathbb{R}^d$. Το $\mathcal{A}$ λέγεται παράταγμα n γραμμικών υπερεπιπέδων στον $\mathbb{R}^d$ (hyperplane arrangement).

Το σύνολο

$$L_{\mathcal{A}} = \{\cap S \mid S \subseteq \mathcal{A}\}$$

όλων των (μη κενών) τομών υποσυνόλων S του $\mathcal{A}$, μερικώς διατ. με τη σχέση του αντίστροφου εγκλεισμού, έχει ελάχιστο και μέγιστο στοιχείο

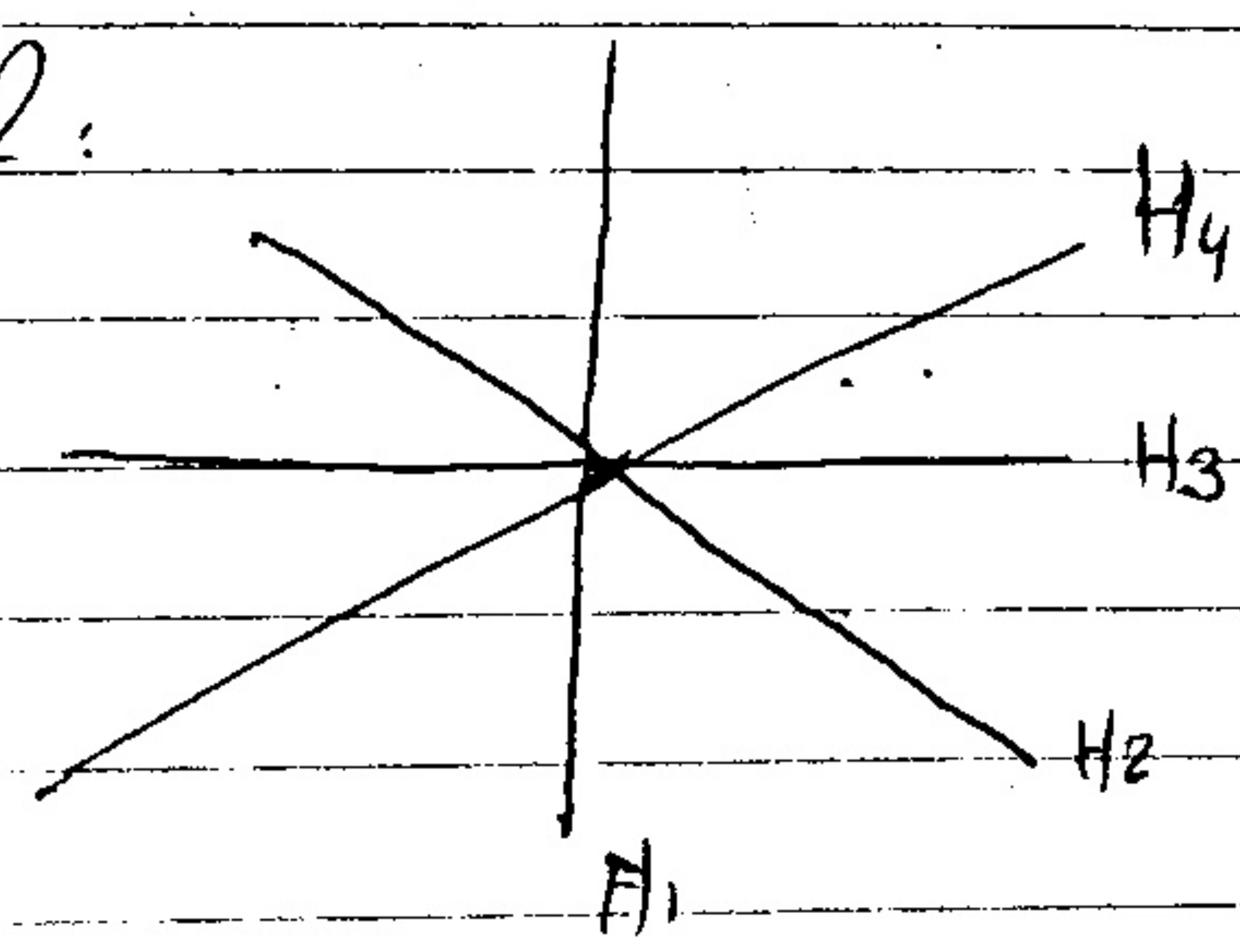
$$\hat{0} = \mathbb{R}^d \ (S = \emptyset), \quad \hat{1} = \bigcap_{i=1}^{n} H_i$$

Το $L_{\mathcal{A}}$ αποτελεί σύνδεσμο, με

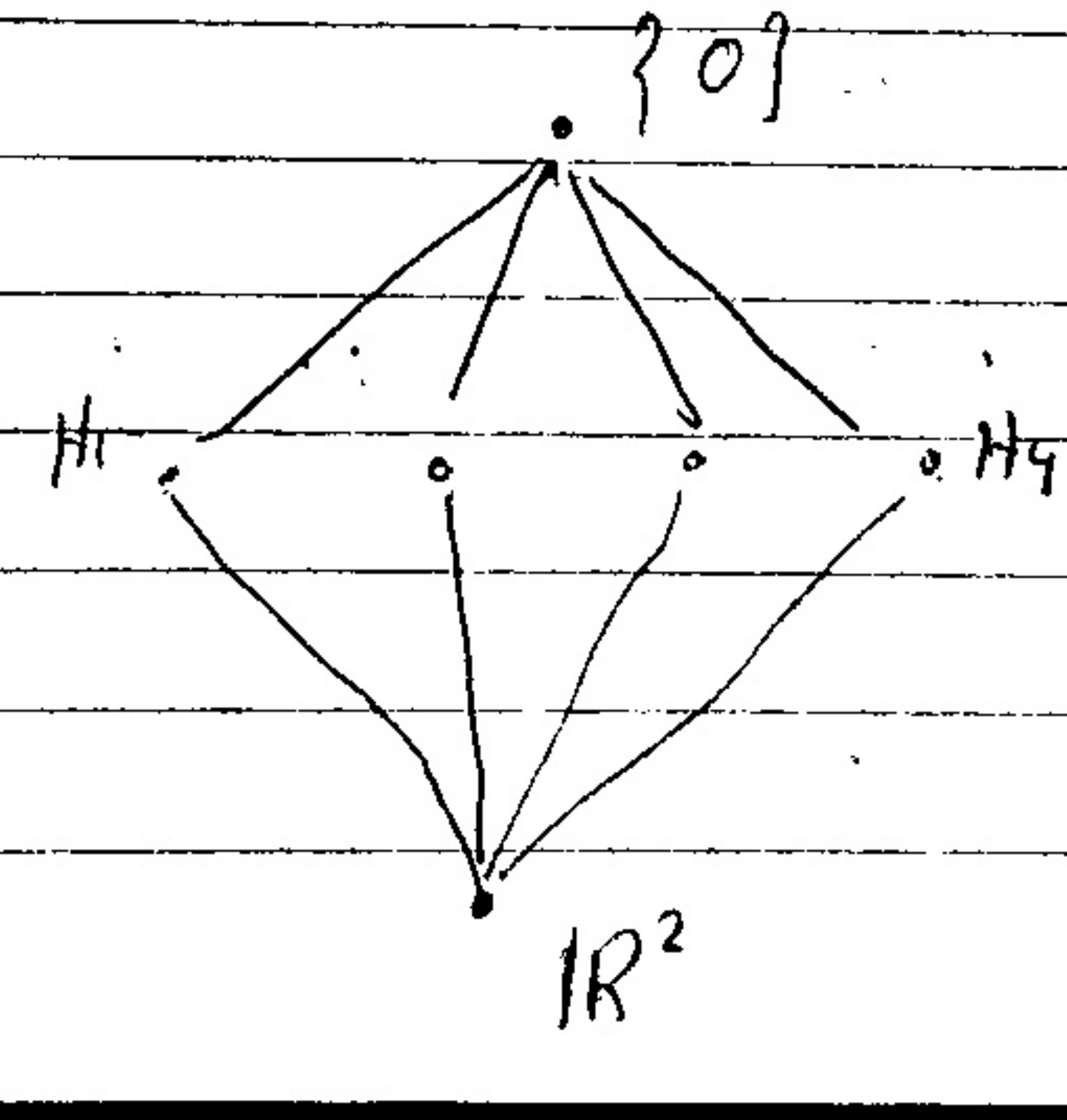
$$x \vee y = x \cap y, \quad x, y \in L_{\mathcal{A}}$$

Αν τα υπερεπίπεδα είναι αφφινικά, τότε το $L_{\mathcal{A}}$ λέγεται σύνολο τομών (intersection poset) του $\mathcal{A}$.

$d = 2$:

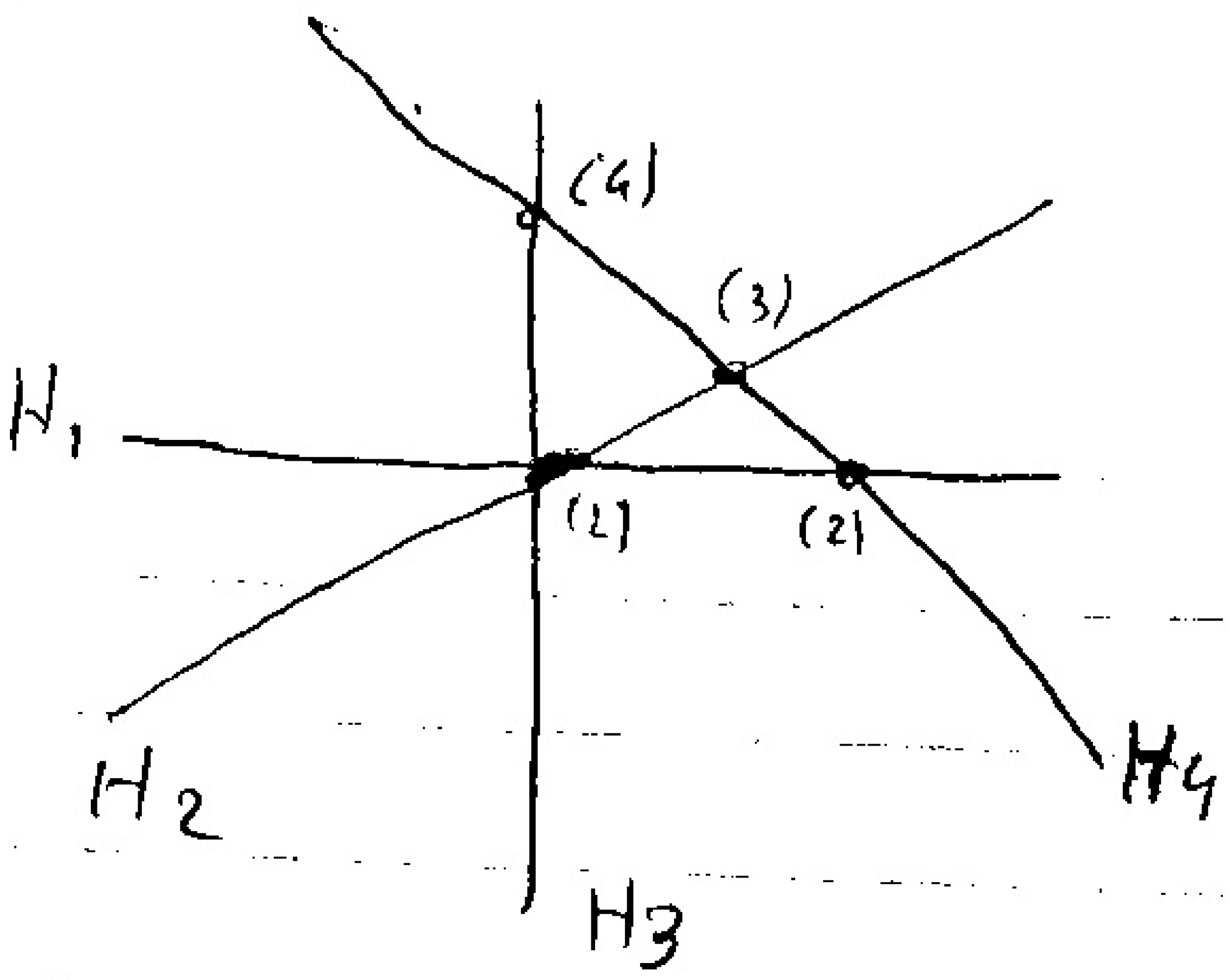


$\mathcal{A}$

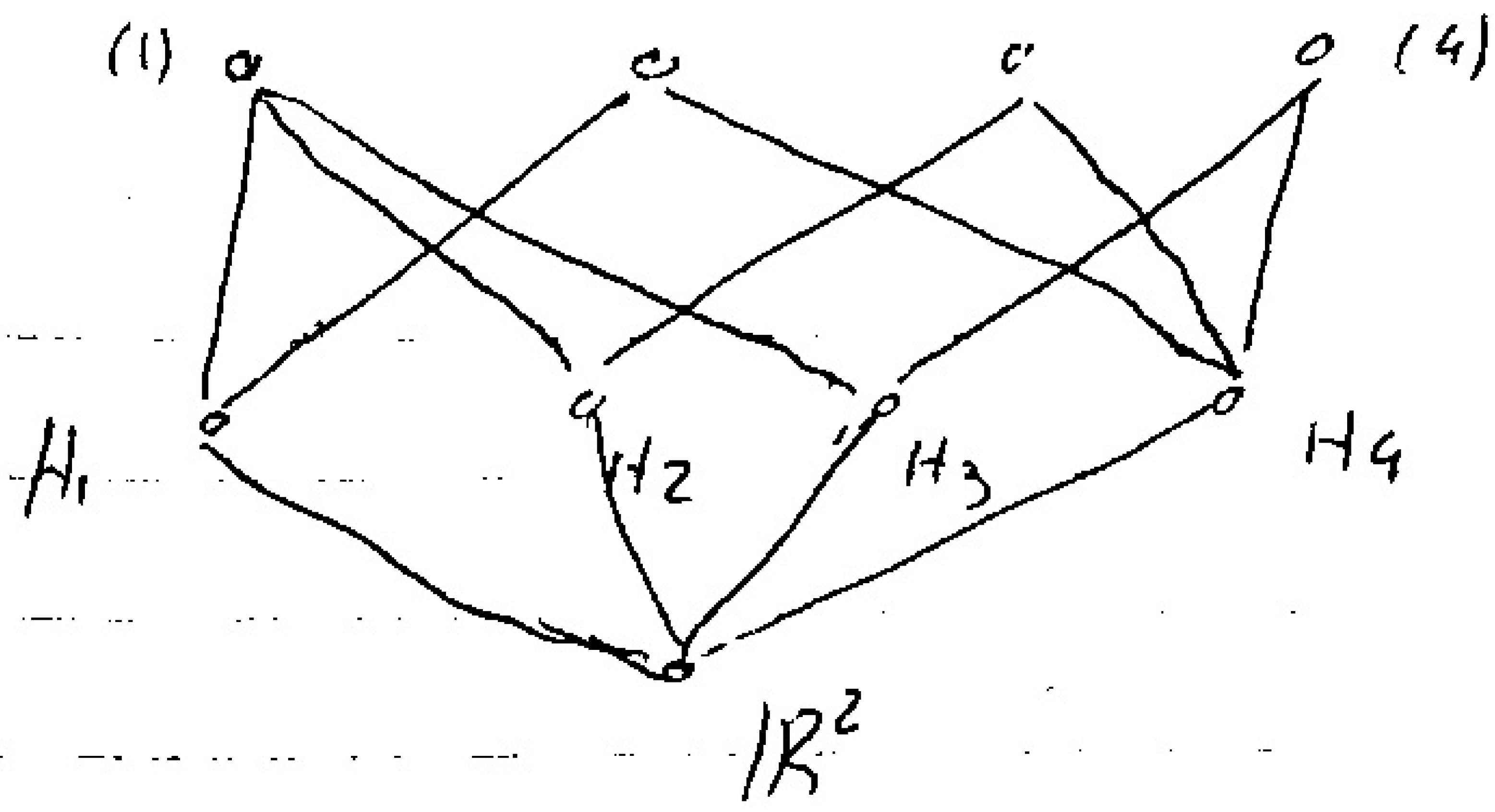


$L_{\mathcal{A}}$

$\mathcal{A}$



$L_{\mathcal{A}}$

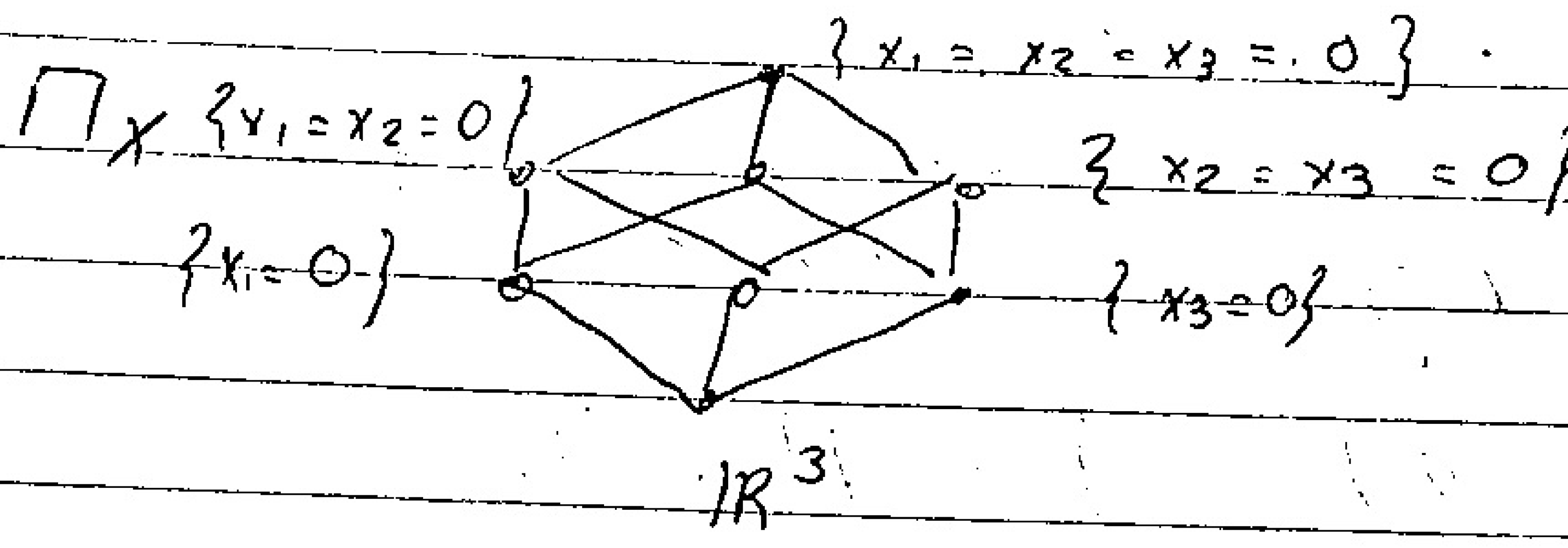


Παράδειγμα 11.6:

a) Αν $\mathcal{A} = \{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ με
$H_i = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i = 0\}$
τότε $L_{\mathcal{A}} \cong B_n$ με ισομορφισμό $\varphi : B_n \to L_{\mathcal{A}}$
που ορίζεται θέτοντας

$$\varphi(S) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i = 0 \text{ για } i \in S\},$$

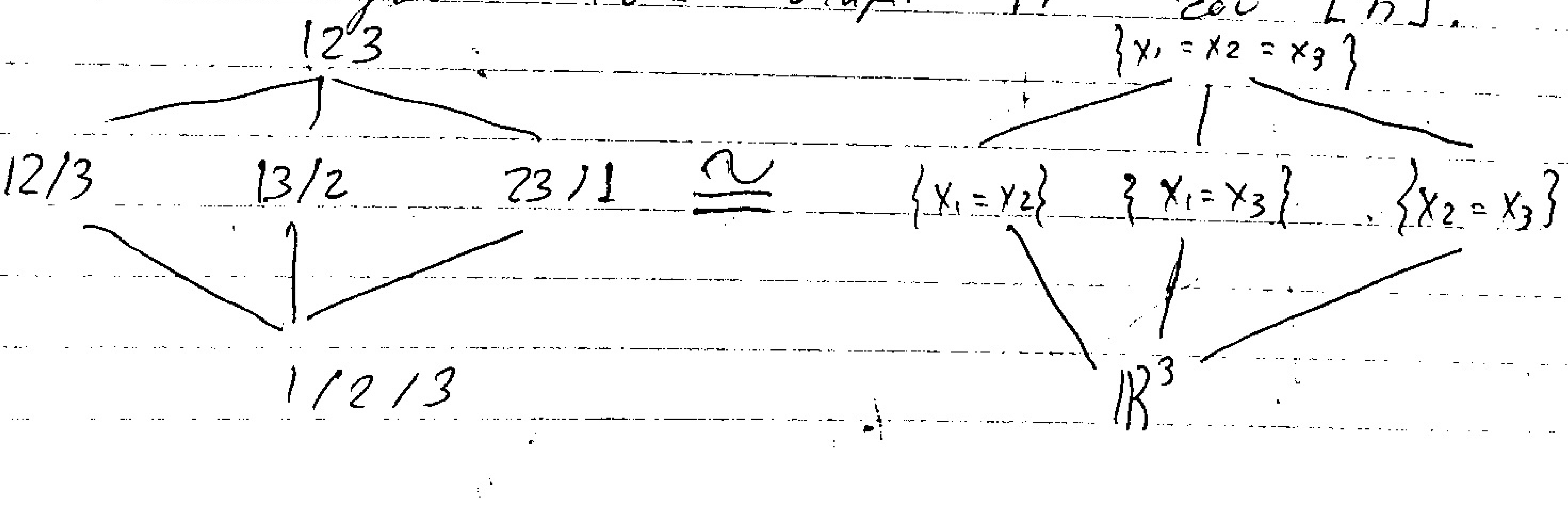
για $S \subseteq [n]$.



b) Αν $\mathcal{A} = \{H_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$
με $H_{ij} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i = x_j\}$, τότε $L_{\mathcal{A}} \cong \Pi_n$
με ισομορφισμό $\varphi : \Pi_n \to L_{\mathcal{A}}$ που ορίζεται θέτοντας

$$\varphi(\pi) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i = x_j \text{ αν } i, j \text{ στο ίδιο μέρος της } \pi\},$$

για κάθε διαμ. π του $[n]$.



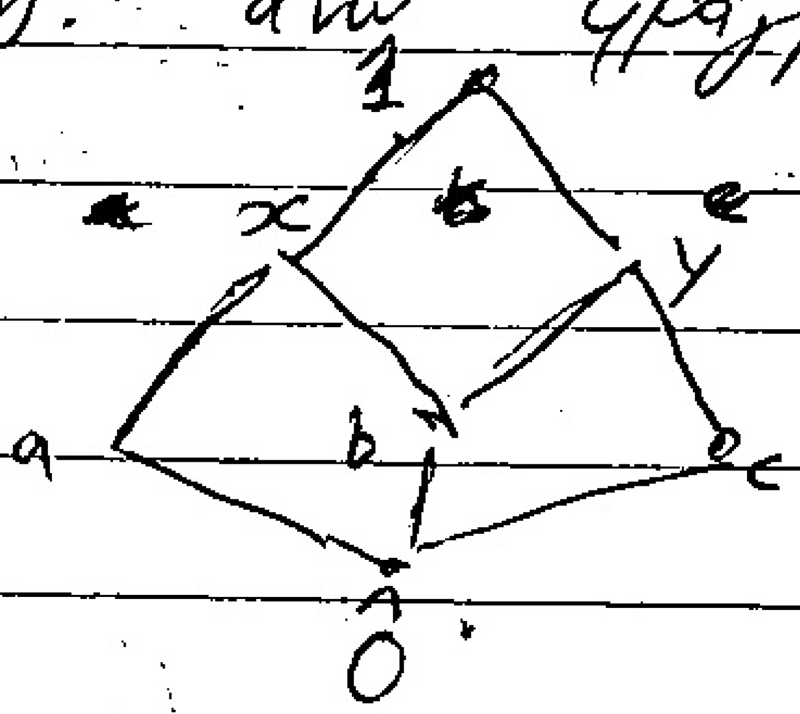
Αν το P έχει ελάχιστο στοιχείο $\hat{0} \in P$ (αντίστοιχα, μέγιστο $\hat{1}$), τότε τα στοιχεία του P που καλύπτουν το $\hat{0}$ λέγονται άτομα, (αντίστοιχα, εκείνα που καλύπτονται από το $\hat{1}$, coatoms).

Πρόταση 11.7: Έστω L πεπερασμένος σύνδεσμος και $X \subseteq L$ που περιέχει όλα τα άτομα του L με $\hat{0} \notin X$. Τότε,

$$\mu_L(\hat{0}, x) = \sum_k (-1)^k N_k(x)$$

όπου $N_k(x)$ το πλήθος των υποσυνόλων του X με k στοιχεία για τα οποία $\bigvee X = x$ (το x είναι ελ. άνω φράγμα του X).

Πχ. αν $L =$



και $X = \{a, b, c\}$,

τότε $a \vee b = x$, $a \vee c = \hat{1}$, $b \vee c = y$, $a \vee b \vee c = \hat{1}$.

οπότε

$$N_k(\hat{1}) = \begin{cases} 0, & \text{αν } k = 0 \text{ ή } 1 \\ 1, & \text{αν } k = 2 \\ 1, & \text{αν } k = 3 \end{cases}$$

Άρα $\mu_L(\hat{0}, \hat{1}) = 0 + 1 - 1 = 0$

Ομοίως, $\mu_L(\hat{0}, x) = \mu_L(\hat{0}, y) = -1$

Απόδειξη: Για $x \in L$ έστω $f(x) = \sum_k (-1)^k N_k(x)$

$$= \sum_{\substack{S \subseteq X \\ \vee S = x}} (-1)^{|S|}$$

Έχουμε $f(\hat{0}) = (-1)^0 = 1$ (κατά σύμβαση, $\vee \emptyset = \hat{0}$)

Αν.δ.ο. $\sum_{\hat{0} \le x \le y} f(x) = 0$. για κάθε $y \in L \setminus \{\hat{0}\}$

Θέτουμε $X_y = \{a \in X : a \le y\}$ και βρίσκουμε ότι

$$\sum_{\hat{0} \le x \le y} f(x) = \sum_{\hat{0} \le x \le y} \sum_{\substack{S \subseteq X \\ \vee S = x}} (-1)^{|S|} = \sum_{\substack{S \subseteq X \\ \vee S \le y}} (-1)^{|S|}$$

$$= \sum_{\substack{S \subseteq X \\ \{a \le y : \text{για κάθε } a \in S\}}} (-1)^{|S|} = \sum_{S \subseteq X_y} (-1)^{|S|} = (1-1)^{|X_y|} = 0$$

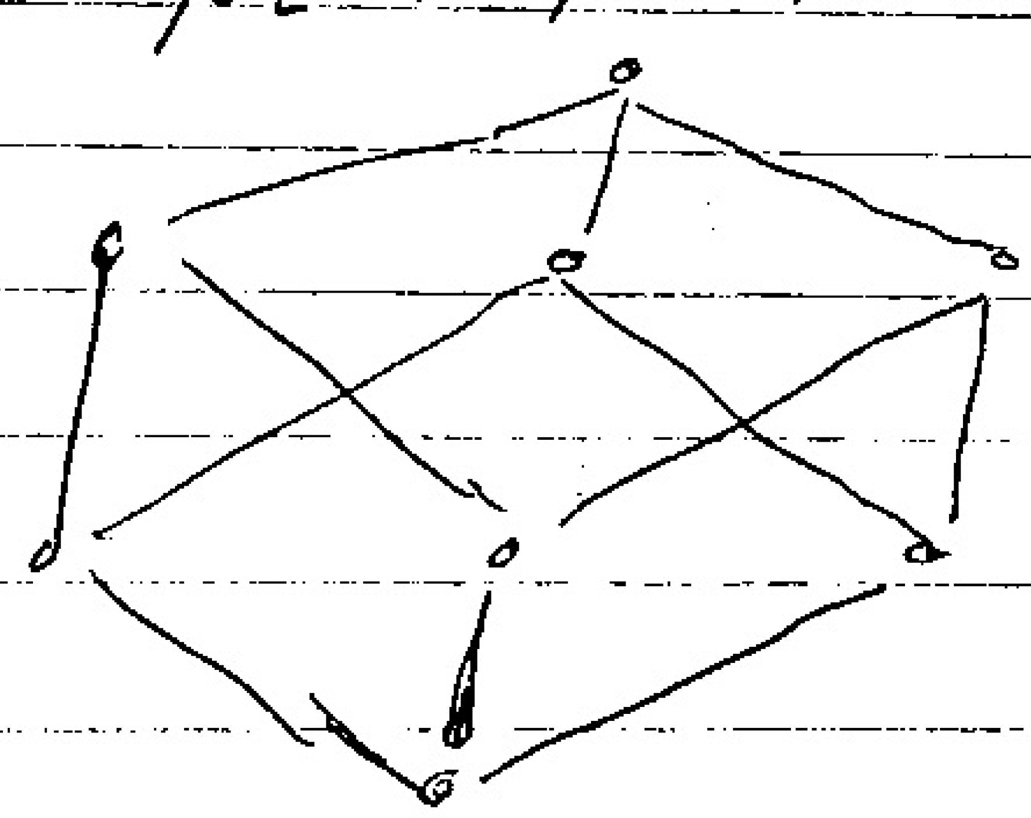
διότι $X_y \neq \emptyset$ (υπάρχει άτομο $a \in L$ με $a \le y$)

Παράδειγμα 11.8: Έστω $L = B_n$ και έστω $X = \{\{i\} : 1 \le i \le n\}$ το σύνολο των ατόμων της B_n.

Τότε, για $x \in B_n$ έχουμε

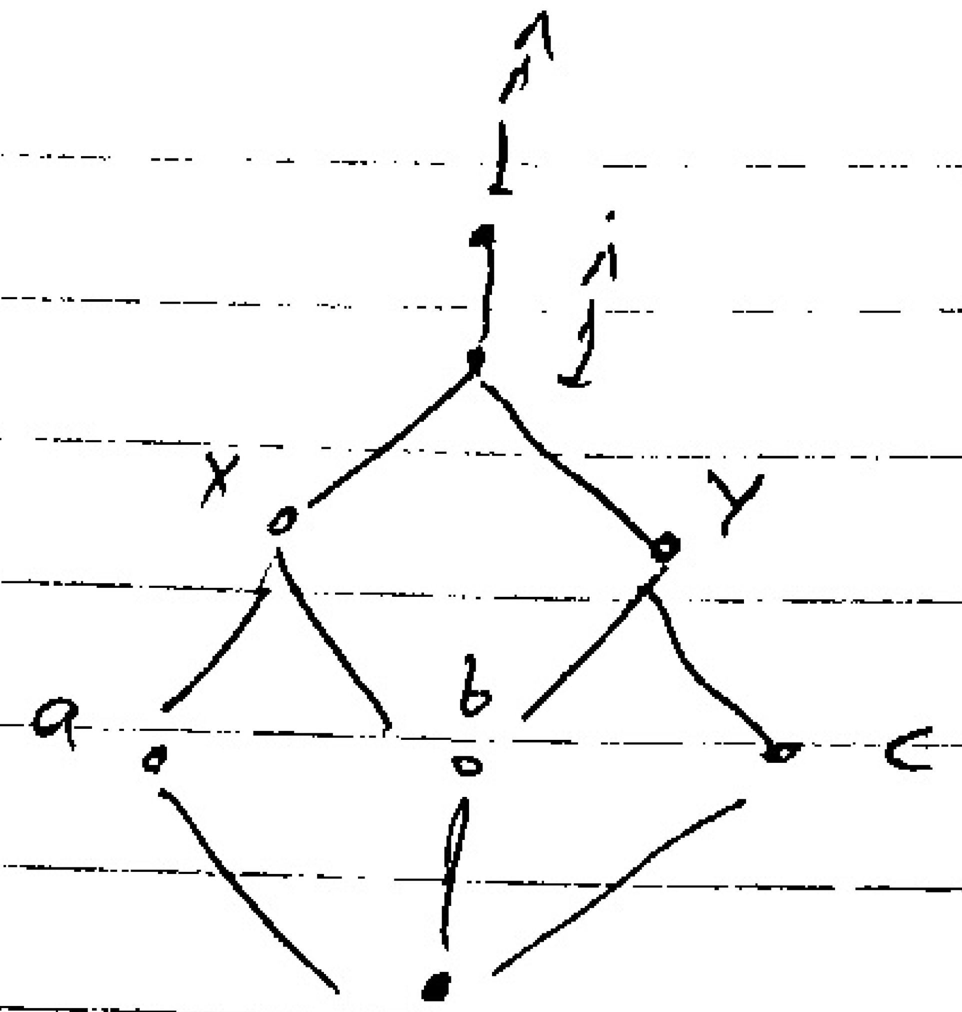
$x = \vee S$ για κάποιο $S \subseteq X$ εάν $S = \{\{i\} : i \in x\}$

Συνεπώς, $\mu_L(\hat{0}, x) = (-1)^{|x|}$



Πόρισμα 11.9: Αν το $x \in L \setminus \{\hat{0}\}$ δεν είναι ίσο με το κατώτατο άνω φράγμα κάποιων ατόμων του συνδέσμου L, τότε $\mu_L(\hat{0}, x) = 0$

Π_X

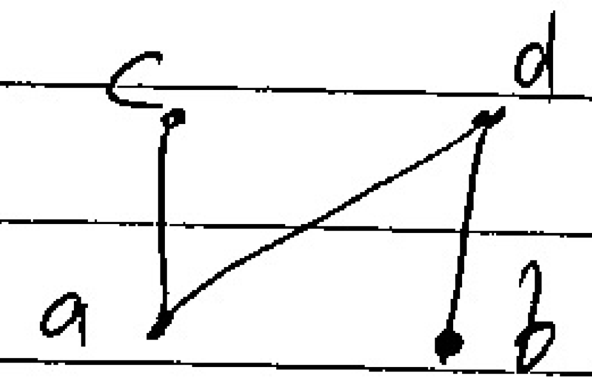


$\mu_L(\hat{0}, \hat{1}) = 0.$

Έστω τώρα πεπερασμένο μερικώς διατεταγμένο σύνολο P και έστω $J(P)$ το σύνολο όλων των ιδεωδών του P, μερικώς διατεταγμένο με τη σχέση του εγκλεισμού: $x \leq y \Leftrightarrow x \subseteq y$

Το $J(P)$ είναι σύνδεσμος με $\hat{0} = \emptyset$, $\hat{1} = P$ και $I_1 \vee I_2 = I_1 \cup I_2$, $I_1 \wedge I_2 = I_1 \cap I_2$

για $I_1, I_2 \in J(P)$. Μάλιστα, η κλάση των μερικών διατάξεων $J(P)$ συμπίπτει με εκείνη των πεπερασμένων επιμεριστικών συνδέσμων (Θεώρημα Birkhoff).

$P =$ 

$J(P) = ?$