

01/10/24 (ΜΑΘΗΜΑ 01)

Δράσεις ομάδων επί συνόλων: μία αριστερή δράση

μίας ομάδας G επί ενός συνόλου $X \neq \emptyset$ είναι μία

απεικόνιση $G \times X \rightarrow X, (g, x) \mapsto g * x$

με τις ακόλουθες ιδιότητες:

i. $1_G * x = x \quad \forall x \in X$

ii. $(g_1 \cdot g_2) * x = g_1 * (g_2 * x) \quad \forall g_1, g_2 \in G \quad \forall x \in X$

Παρατήρηση: κάθε αριστερή δράση αντιστοιχεί σε δράιά

και αντίστροφος: $g * x = x * g^{-1}$.

Συνήθως συμβολίζουμε $g \cdot x$ αντί $g * x$ και $G \curvearrowright X$ για τη δράση.

Παρατήρηση: κάθε δράση $G \curvearrowright X$ εναρμόζει ομομορφ.

$\rho: G \rightarrow \mathcal{S}_X$, που λέγεται εναρμόζοντας ομομορφ. ή αντίστοιχη αναπαράσταση. Ισχύει και το αντίστροφο.

Λήμμα: Αν $G \curvearrowright X$, ορίζουμε: $\rho: G \rightarrow \mathcal{S}_X$,
 $\rho(g)(x) = g * x$.

Εύκολα επαληθεύεται ότι $\rho(g)^{-1} = (\rho(g))^{-1}$, (ή, $\rho(g) \in \mathcal{S}_X$

και ότι είναι ομοιομορφισμός. Αντιστρόφως, $g * x = \rho(g)(x)$.

Βασικά παραδείγματα:

[1] Έστω G ομάδα και $X = G$ (ως σύνολο). Τότε
 $g * h = g \cdot h$.

[2] Η τετριμήκης δράση $g * x = x \quad \forall g \in G, \forall x \in X$,
 αντιστοιχεί στον τετριμήκω ομομορφισμό $\rho(g) \equiv 1, \forall g \in G$.

[3] Έστω G ομάδα, $H \leq G$ υποομάδα, $X = G/H$ (τα
 αριστερά κλάσματα). Τότε $g * (xH) = gxH$.

[4] Η διαδριική ομάδα Φ_n δρα σε κανονικό n -γινω
 π_n με στροφές και ανακλάσεις.

[5] Η $GL_n(\mathbb{R})$ δρα στον $\mathbb{R}^n$: $A * x = A \cdot x$ (συνθεσι
 πολλαπλασιασμός).

[6] Έστω X τοπολογικός χώρος, κατά τόξα συνεκτικός,
 και $G = \pi_1(X, *)$ η 1° πειραγμένη ομάδα.

Η G δρα στο κανονικό κάλυμμα $\tilde{X}$ του X με
 μετασχηματισμούς επικάλυψης.

[7] Κάθε ομάδα G δρα στον εαυτό της με συζυγίες:
 $g * x = gxg^{-1}$.

Ορισμοί: Έστω $G \curvearrowright X$. Η δράση λέγεται "πίσημη"
 εάν η αντίστοιχη αναμετάσταση $f: G \rightarrow S_X$ είναι
 1-1.

Το σύνολο $G \cdot x = \mathcal{O}_G(x) = \{g \cdot x \mid g \in G\}$ λέγεται
 τροχιά του x . Η δράση ~~λέγεται~~ λέγεται "μεταβατική"
 εάν υπάρχει μία μόνο τροχιά: $X = \mathcal{O}_G(x)$ για
 κάποιο x .

Η σταθεροποιητική $\text{Stab}_G(x) := G_x := \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$
 είναι υποομάδα της $[G, G]$.

Παρατήρηση: Αν $G \curvearrowright X$, η δράση ορίζει σχέση
 ισοδυναμίας:

$$x \sim y \Leftrightarrow x, y \text{ ανήκουν στην ίδια τροχιά.}$$

Οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι οι τροχιές. Συνεπώς:

$$X = \bigcup_i \mathcal{O}(z_i)$$

Παράδειγμα: Έστω ομάδα G και $H \leq G$. Η υποομάδα

H δρα στην G με αριστερό πολλαπλασιασμό. Οι τροχιές
 είναι τα δεξιά εὐκλείδη $\mathcal{O}_H(g) = Hg$.

Η G είναι ένωσ. δειγμών συνηλίκων / τροχιών.

Πρόταση: Έστω X ένα G -σύμπλο και $x \in X$. Τότε:

$$|\mathcal{O}(x)| = [G : G_x]$$

↑
το μέγεθος της τροχιάς

Απόδ.: Η απεικόνισμα

$$\varphi: \mathcal{O}(x) \rightarrow \{\text{αριθ. υπόμνηκα της } G_x \text{ στη } G\} = G/G_x$$

$$\varphi(gx) = gG_x$$

είναι καλά ορισμένη, 1-1 & επί.

Πρόταση 1: Αν G πεπερασμένη, τότε $|\mathcal{O}(x)| \mid |G|$.

Πρόταση 2: Αν X πεπερ/νο G -σύμπλο και T

σύμπλο απεικονισμών των τροχιών της δράσης, τότε

$$|X| = \sum_{x \in T} [G : G_x]$$

Απόδ.: $X = \bigsqcup_{x \in T} \mathcal{O}(x)$ & $|\mathcal{O}(x)| = [G : G_x]$.

Πρόταση 3: Το $\mathcal{O}$ του Lagrange.

— 5 —

Απόδειξη: Έστω $H \trianglelefteq G$, G πεπεσμένη, και

$H \triangleleft N \rightarrow X = G$. Έχουμε:

$$|G| = |X| = \sum_{x \in T} [H : H_x]$$

όπου $H_x = \{h \in H \mid hx = x\} = \{1\}$ κι άρα:

$$\begin{aligned} |G| &= \sum_{x \in T} [H : \{1\}] \Rightarrow |G| = |T| \cdot |H| \\ &= |G : H| \cdot |H| \end{aligned}$$

Τέλος προτάσεως 1