

03/10/24 (Μάθημα 02)

ΔΡΑΣΕΙΣ ΟΜΑΔΩΝ ΣΕ ΣΥΜΠΛΟΚΑ ΥΠΟΟΜΑΔΩΝ

Έστω G μία ομάδα και $H \leq G$

Έστω $X = G/H$ το σύνολο των αριστερών συζυγόμενων της H στη G .

Η G δρα επί της X ως εξής: $g \cdot (xH) = gxH$

Η δράση είναι μεταβατική. Επίσης, $\text{stab}_G(xH) = xHx^{-1}$

Θεωρούμε τον αντίστοιχο ομομορφισμό:

$$\rho_H: G \rightarrow \mathcal{S}_{G/H}$$

και έχουμε: $\ker \rho_H = \bigcap_{x \in G} xHx^{-1} \trianglelefteq G$

Η κανονική υποομάδα $\mathcal{N} := \ker \rho_H$ λέγεται πυρήνας (core) της H στη G . Συμβολίζουμε $\text{Core}(H)$.

Η $\mathcal{N}$ είναι η μεγαλύτερη κανονική υποομάδα της G που περιέχεται στην H .

Στην περίπτωση που $[G:H] = n < \infty$, $\mathcal{S}_{G/H} \cong \mathcal{S}_n$ και έχουμε $\rho_H: G \rightarrow \mathcal{S}_n$

Επίσης, $\mathcal{N} = \ker \rho_H \trianglelefteq G \Rightarrow \mathcal{N} \leq H$ και $[G:\mathcal{N}] = \underbrace{[G:H]}_m \cdot \underbrace{[H:\mathcal{N}]}_n$
 $\Rightarrow n \mid m$

Από το 1^ο θεώρημα κομορζιφών:

$$e/N \cong \text{Im } f_H \leq \mathcal{S}_n \Rightarrow m|n!$$

Πρόταση: Κάθε υποομάδα H πεπερασμένου δείκτη n σε μία ομάδα G , περιέχει κανονική υποομάδα της G πεπερασμένου δείκτη m ούτως ώστε $m|n!$ και $n|m$.

[Παρατ: $K \leq H \leq G \Rightarrow [G:K] = [G:H] \cdot [H:K]$]

Απόδ: Έστω $\{h_i\}$ σύνολο αντιπροσώπων των αριστερών κομορζικών της K στην H και $\{g_j\}$ σύνολο [...] της H στην G .

$$\exists g = g_j h_i = g_j h_i k, \text{ δηλαδή } g \in g_j h_i k$$

Τα $\{g_j h_i k\}$ είναι ανά δύο ξένα.

$$\text{Αν } \underbrace{g_j h_i k}_{\in H} = \underbrace{g_r h_r k}_{\in H} \Rightarrow g_j = g_r \Rightarrow h_i k = h_r k \Rightarrow h_i = h_r$$

ΔΡΑΣΕΙΣ ΜΕ ΣΥΖΥΓΙΕΣ.

Έστω G ομάδα και $X \leq G$. Η H δρα στο X με συζυγίες ως εξής:

$$g * x = g x g^{-1}$$

Η τροχιά του $x \in G$ λέγεται κλάση συζυγίας του x . Συμβολίζουμε: $Cl_G(x)$ ή $Cl(x)$.

Για τη σταθεροποίηση:

$$\text{Stab}_G(x) = \{g \mid g x g^{-1} = x\} = \{g \mid g x = x g\}$$

$\hookrightarrow$ η κεντροποίηση
 $C_G(x)$.

Αν G πεπερασμένη, τότε $|Cl_G(x)| = [G : C_G(x)] \mid |G|$.

Αν θεωρήσουμε την επίστοιχη αναπαράσταση $\rho: G \rightarrow \mathcal{S}_G$,

τότε $\ker \rho = Z(G) \trianglelefteq G$

$\hookrightarrow$ το κέντρο της G ,

$$Z(G) = \{g \in G \mid g x = x g \ \forall x \in G\}$$

Παρατηρούμε επίσης ότι το κέντρο $Z(G)$ αποτελείται από τα στοιχεία της ομάδας όπου οι τροχιές τους είναι μονοκύκλοι:

$$x \in Z(G) \Leftrightarrow Cl_G(x) = \{x\}$$

Πρόταση (εξίσωση κλάσεων): Έστω G πεπερασμένη

ομάδα και $Cl_G(x_1), \dots, Cl_G(x_n)$ οι κλάσεις

συζυγίας της G όπου δεν είναι μονοκύκλοι (αν υπάρχουν).

Τότε:

$$|G| = \underbrace{|Z(G)|}_{\ll \text{είναι μονοκύκλος} \gg} + \underbrace{\sum_{i=1}^n [G : C_G(x_i)]}_{\ll \text{δεν είναι μονοκύκλος} \gg}$$

$$= |Z(G)| + \sum_{i=1}^n |Cl_G(x_i)|$$

Απόδ: Η G είναι γένεση ένωσης τριγώνων.

$$G = Z(G) \bigcup_{i=1}^n C l_G(x_i).$$

Πρόταση 1: Αν $|G| = p^n$, $n > 0$, p πρώτος, τότε $Z(G) \neq 1$.

[Εξαγωγή με μη-τετριμ. κανονικών υποομ.]

Απόδ: με τον συμφορικό της προηγούμενης πρότασης:

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^n |C l_G(x_i)|$$

Αν $n=0$, $|G| = |Z(G)|$ και τότε $G = Z(G) \neq 1$.

Αν $n > 0$, τότε $p \mid |C l_G(x_i)|$, αφού $|C l_G(x_i)| > 1$ και

$|C l_G(x_i)| \mid |G| = p^n$. Συνεπώς,

$$p \mid \sum_{i=1}^n |C l_G(x_i)|, \quad p \mid |G| \Rightarrow p \mid |Z(G)|.$$

Επομένως, $Z(G) \neq \{1\}$.

Πρόταση 2: Κάθε ομάδα τάξης p^2 , p πρώτος, είναι αβελιανή.

Απόδ: $|G| = p^2$, κι αφού το προηγούμενο, $Z(G) \neq 1$.

Αν $|Z(G)| = p^2$, τότε $Z(G) = G$ (αβελιανή).

Αν $|Z(G)| = p$, τότε η ομάδα πηλίκου $G/Z(G)$ έχει τάξη p και έτσι είναι κυκλική.

Όπου $G/Z(G)$ κυκλική $\Rightarrow G$ αβελιανή.

$[G/Z(G) = \langle \alpha Z(G) \rangle$ και αν g_1, g_2 δύο στοιχεία,

$$g_i = a^{n_i} z_i \Rightarrow g_1 g_2 = a^{n_1} z_1 a^{n_2} z_2 = a^{n_2} z_2 a^{n_1} z_1 = g_2 g_1$$

Πόρισμα 3: Αν $|G| = p^n$, p πρώτος, τότε η G

έχει κανονική υποομάδα τάξης p^m για κάθε $m \leq n$.

Γιατί, αν $n > 1$, η G δεν είναι απλή.

Απόδειξη: $Z(G) \trianglelefteq G$ και $Z(G) \neq 1$, από το Πόρισμα 1.

Έστω $|Z(G)| = p^k$, $k > 1$. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- $G \not\subseteq Z(G) \Leftrightarrow k < n$

□ $m \leq k$: Εμφανικά το $Z(G)$ περιέχει κανονική υποομάδα $\alpha' \trianglelefteq Z(G)$, τάξης p^m , η οποία είναι κανονική ως κεντρική.

□ $m > k$: Θεωρούμε τον φυσικό επιμορφισμό $G \rightarrow G/Z(G)$.

Εφόσον $|G/Z(G)| = p^{n-k} < |G|$, εμφανικά είναι

ότι η $G/Z(G)$ περιέχει κανονική υποομάδα τάξης

p^{m-k} , η οποία από το Θ. της αντιστοιχίας

έχει τη μορφή $\alpha'/Z(G)$, $\alpha' \trianglelefteq G$, $\alpha' \supseteq Z(G)$.

Έστω, $|G| = p^m$.

- $G = Z(G)$, δηλαδή G αβελιανή [εδώ κάνει υπομείνει είναι κανονική]

$$\text{Έστω } 1 \neq g \in G \quad \begin{cases} G \neq \langle g \rangle & (*) \\ G = \langle g \rangle & (**) \end{cases}$$

□ Αν (*): Όπως πριν, αντικαθιστούμε στην ανώστευση $\langle g \rangle \leftrightarrow Z(G)$. και κάνουμε ανάλογη ανώστευση.

□ Αν (**), θεωρούμε $n > 1$ και το $g^p, (g^p)^{p^{n-1}} \Rightarrow$

$\Theta(g) \leq p^{n-1}$. Εργαζόμαστε όπως πριν, χρησιμοποιώντας το $\langle g^p \rangle$.

[Αν $n=1$: $\Theta(g)=1$ και $G=\langle g \rangle$ — κυκλική τάξης p]

ΔΡΑΣΗ ΣΥΖΗΤΙΑΣ ΣΕ ΥΠΟΟΜΑΔΕΣ

Έστω G ομάδα και $X = \{H \mid H \leq G\}$. $H \leq G$ δρα σε X με συζυγίες. Δηλαδή $g * H = gHg^{-1}$.

$\Theta_G(H) = \langle \text{υποομάδες της } G \text{ που είναι συζυγείς με την } H \rangle$

$$\text{Stab}_G(x) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\} = \mathcal{N}_G(H)$$

↑ H κανονικοποιείται ως H στην G .

Η $\alpha'_G(H)$ είναι η μεγαλύτερη υποομ. της G στην οποία η H είναι κανονική.

$$H \trianglelefteq G \Leftrightarrow \alpha'_G(H) = G.$$

Το ηλίκελος των αγγών υποομ. της H ισούται με :

$$[G : \alpha'_G(H)] \quad [\text{δείκτης της κανονικοποίησης}]$$

Τέλος μαθήματος 2