(08/10/24) ΜΑΘΗΜΑ 03

μερικές ασκήσεις.

<u>Άσκηση 1:</u> Το πλήθος των υποομάδων πεπερασμένου δείκτη n σε μια πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα G είναι πεπερασμένο.

<u>Λύση:</u> Έστω $H \leq G$ δείκτη $[G:H] = n$.

Γνωρίζουμε ότι κάθε υποομ. δείκτη n, άρα και η H, επάγει ομομορφ. $\rho_H : G \to S_n$

Γράφουμε:

$$G = g_1 H \sqcup \cdots \sqcup g_n H$$

και θεωρούμε $g_1 = 1$, για ευκολία. Με αυτήν την σύμβαση, ο ομομορφισμός ορίζεται ως εξής:

$$\rho_H(g)(k) = \nu \iff g g_k H = g_\nu H \quad , \; k, \nu \in \{1, \dots, n\}$$

(μετάθεση των αντιπροσώπων)

Παρατηρούμε ότι $\rho_H(g)(1) = 1 \iff g \in H$

Εφόσον η G είναι πεπερασμένα παραγόμενη και η S_n πεπερασμένη ομάδα, υπάρχουν πεπερ/νοι το πλήθος ομομορφ. $G \to S_n$.

[Αν $G = \langle s_1, \dots, s_t \rangle$, τότε κάθε ομομορφισμός $\varphi : G \to S_n$ καθορίζεται πλήρως από τις εικόνες $\varphi(s_j)$, και κάθε $\varphi(s_j)$ έχει πεπερ/νες επιλογές να οριστεί, αφού η S_n πεπερ/νη] αρκεί να δείξουμε ότι διαφορετικές υποομάδες $H \leq G$ δείκτη n αντιστοιχούν σε διαφορετικούς ομομορφισμούς.

Έστω $H \neq K$ δείκτη n στην G. Θεωρούμε τους ομομορφισμούς $\rho_H, \rho_K : G \to S_K$.

Εφόσον $H \neq K$, δεν ισχύει $H \subseteq K$ ή $K \subseteq H$ [λόγω του δείκτη n]

Αν $H \not\subseteq K$ και $h \in H \setminus K$, τότε:

$$\left.\begin{array}{l} \rho_H(h)(1) = 1 \\ \rho_K(h)(1) \neq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \rho_H \neq \rho_K$$

Ομοίως αν $H \not\supseteq K$.

□

<u>Ορισμός</u>: (χαρακτηριστική υποομάδα) Μία υποομάδα $H \leq G$ μίας ομάδας G θα λέγεται χαρακτηριστική εάν:

$$\varphi(H) \subseteq H \quad \forall \text{ αυτομορφ. } \varphi \in Aut(G)$$

[Αν $\varphi(H) \subseteq H$ $\forall \varphi \in Aut(G)$, τότε $\varphi^{-1}(H) \subseteq H \Rightarrow H \subseteq \varphi(H)$, δηλαδή $\varphi(H) = H$]

Συμβολίζουμε: $H \trianglelefteq_{\chi\alpha\rho} G$.

<u>Παρατήρηση</u>: Κάθε χαρακτηριστική είναι κανονική

[Αφού μένει αναλλοίωτη κάτω από κάθε εσωτ. αυτομορφ.]

Το αντίστροφο δεν ισχύει. Παράδειγμα:

$$G = \underset{\underset{\langle\alpha\rangle}{\parallel}}{\overset{\overset{H}{\parallel}}{\mathbb{Z}_2}} \times \underset{\underset{\langle\beta\rangle}{\parallel}}{\overset{\overset{K}{\parallel}}{\mathbb{Z}_2}}, \quad \varphi : \left\{ \begin{array}{l} \alpha \mapsto \beta \\ \beta \mapsto \alpha \end{array} \right\}$$

Έστω $K \trianglelefteq_{χαρ} G$. Εφόσον $\varphi(K)=K$ $\forall \varphi \in Aut(G)$, έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & G \arrow[d, "\pi"] \\ G/K \arrow[r, "\tilde{\varphi}"'] & G/K \end{tikzcd}$$

όπου $\pi: G \to G/K$ ο φυσικός επιμορφισμός και $\tilde{\varphi}(gK) = \varphi(g)K$.

Επίσης, $\tilde{\varphi} \in Aut(G/K)$ και έχουμε ομομορφ.

$$\mathcal{E}: Aut(G) \to Aut(G/K)$$
$$\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$$

Αν επιπλέον K πεπερασμένου δείκτη, τότε $Aut(G/K)$ πεπερασμένη ομάδα.

<u>Άσκηση 2</u>: Κάθε πεπερασμένα παραγ.-ομάδα G που περιέχει γνήσια υποομάδα H πεπερασμένου δείκτη, περιέχει γνήσια χαρακτηριστική υποομάδα N πεπερασμένου δείκτη στην G με $N \subseteq H$.

<u>Λύση</u>: Έστω $n = [G:H]$, $\mathcal{A} = \{K \leq G \mid [G:K] = n\}$

Από το προηγούμενο, το πλήθος των υποομάδων δείκτη n στην G είναι πεπερασμένο, αφού G πεπερασμένα παραγ. Δηλαδή, το $\mathcal{A}$ πεπερασμένο.

Έστω $N = \bigcap_{K \in \mathcal{A}} K$ ⟵ πεπερασμένου δείκτη.

Η N είναι πεπερασμένου δείκτη στην G ως τομή πεπερασμένου πλήθους υποομάδων πεπερασμένου δείκτη.

[$G/\bigcap H_i \longrightarrow \prod_i G/H_i$ [illegible]]

$$\left[\, g\left(\bigcap H_i\right) \mapsto (gH_i)_S \,\right]$$

Κάθε αυτομορφισμός $\varphi \in Aut(G)$ μεταθέτει τις υποομ. με A και συνόλους

$$\varphi\left(\bigcap_K K\right) = \bigcap_K K$$ (επίσης, διατηρούνται δείκτες)

Άρα $\varphi(N)=N$, $N \trianglelefteq_{\chi\alpha\rho} G$ και $[G:N]<\infty$, $N \subseteq H$. □

Άσκηση 3: Έστω H, K πεπερασμένες υποομ. μιας ομάδας G.
Τότε:

$$|HK| = \frac{|H|\cdot|K|}{|H\cap K|}$$

↑ ως σύνολο

[Σημείωση: HK υποομ. $\Leftrightarrow$ $HK=KH$]

Λύση: Θεωρούμε τον περιορισμό στην H της φυσικής δράσης $G \curvearrowright G/K$, δηλ. της $H \curvearrowright G/K$ με $h * gK = hgK$.

Έστω:

$$\mathcal{O}(K) = \{h_1K, \dots, h_pK\}$$

Τότε,

$$HK = \coprod_{i=1}^{p} h_iK \quad \text{και} \quad |HK| = \sum_{i=1}^{p} |h_iK| = \sum_{i=1}^{p} |K| = p|K|$$

όπου p το μήκος της τροχιάς $\mathcal{O}(K)$. Δηλαδή:

$$p = [H : Stab_H(K)] = [H : H\cap K]$$

Τελικά: $|HK| = p|K| = [H : H\cap K]\,|K| = \dfrac{|H|\cdot|K|}{|H\cap K|}$

□

<u>Άσκηση 4</u>: Έστω G πεπερασμένα παραγ. ομάδα και $H \leq G$ πεπερασμένου δείκτη. Τότε η H είναι πεπερασμένα παραγ.

<u>Λύση</u>: Έστω S πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων της G και $[G:H]=n$, $G = Hg_1 \amalg \cdots \amalg Hg_n$.

Δηλ, $X = \{g_1 = 1, g_2, \dots, g_n\}$ σύνολο αντιπροσώπων δεξιών συμπλόκων της H στην G.

$$H \ni h = s_1 \cdot \ldots \cdot s_k \quad , \text{ όπου } s_i \in S^{\pm 1}$$
$$= h_1 g_{v,1} \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_k \quad , \quad s_1 = h_1 g_{i,1}, \; h_1 \in H, \; g_{v,1} \in X$$
$$= h_1 h_2 \cdot g_{i,2} \cdot s_3 \cdot \ldots \cdot s_k \quad , \quad [\dots]$$
$$\vdots$$
$$= \underbrace{h_1 h_2 \cdots h_k}_{\in H} g_{v,k} \Rightarrow g_{v,k} = 1 \text{ και } h = h_1 \cdot \ldots \cdot h_k$$

Παρατηρούμε ότι το σύνολο $\{ x s y^{-1} \in H \mid x, y \in X, \; s \in S^{\pm 1} \}$ είναι πεπερ/νο και παράγει την H.

$\square$

Αντιστρόφως, αν H πεπερασμένου δείκτη στην G και H πεπερ. παραγ, τότε G πεπερασμένα παραγόμενη.

Αν $G = \coprod_{i=1}^{n} g_i H$, $H = \langle s_1, \dots, s_k \rangle$, τότε

$$G = \langle g_1, \dots, g_n, s_1, \dots, s_k \rangle$$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ SYLOW

$\boxed{\Theta}$ (Sylow) Έστω G πεπερασμένη ομάδα τάξης mp^n, p πρώτος, και $\gcd(p,m)=1$.

Τότε, για κάθε $s\in\{0,\dots,n\}$ η G περιέχει υποομάδα τάξης p^s

Απόδειξη: Έστω $X=\{A\subseteq G \mid |A|=p^s\}$ (περιέχει υποσύνολα).

Η G δρα στο X με πολ/σμό από τα αριστερά:

$$G \curvearrowright X, \quad g*A = gA = \{g\alpha, \alpha\in A\}$$

υπολογίζουμε:

$$|X| = \binom{mp^n}{p^s} = \frac{(p^n m)!}{p^s!\,(p^n m-p^s)!}$$

$$= \frac{p^n m\,(p^n m-1)\cdot\ldots\cdot(p^n m-p^s+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot p^s}$$

$$= p^{n-s} m\,\frac{(p^n m-1)\cdot\ldots\cdot[p^n m-(p^s-1)]}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(p^s-1)}$$

$$= p^{n-s} m \prod_{i=1}^{p^s-1} \frac{p^n m-i}{i}$$

και θεωρούμε τους ρητούς $q_i = \dfrac{p^n m-i}{i}$ $\quad i\le p^s-1$.

Θα δείξουμε ότι κάθε δύναμη του p που διαιρεί τον αριθμητή, διαιρεί και τον παρονομαστή (και αντίστροφα)

- Αν $p^\nu \mid i$, τότε $p^\nu \leq i \leq p^s \Rightarrow \nu < s \leq n \Rightarrow$
  $\Rightarrow p^\nu \mid p^n m$

Άρα, $\left\{\begin{array}{l} p^\nu \mid p^n m \\ p^\nu \mid i \end{array}\right\} \Rightarrow p^\nu \mid p^n m - i$

- Αν $p^\nu \mid p^n m - i$ και $\nu \geq s$, τότε $p^s \mid p^\nu \mid p^n m - i$,

δηλ. $\left.\begin{array}{l} p^s \mid p^n m - i \\ p^s \mid p^n m \end{array}\right\} \Rightarrow p^s \mid i \leq p^s - 1$ [Άτοπο]

Άρα $\nu < s$. Όπως παραπάνω, δείχνουμε $p^\nu \mid i$.

Έπεται ότι η μεγαλύτερη δύναμη του p που διαιρεί τον $|X|$ είναι p^{n-s}.

Ιδιαιτέρως, $p^{n-s+1} \nmid |X|$.

Εφόσον το X είναι ξένη ένωση τροχιών, υπάρχει τροχιά $\mathcal{O}(\Lambda)$, $\Lambda \in X$, με $p^{n-s+1} \nmid |\mathcal{O}(\Lambda)|$.

Γράφουμε:

$$|\mathcal{O}(\Lambda)| = [G : G_\Lambda] \Rightarrow |G| = |\mathcal{O}(\Lambda)| \cdot |G_\Lambda|$$

αφού $|G| = p^n m$ και η μεγαλύτερη δύναμη που διαιρεί το $|\Theta(\Lambda)|$ είναι p^{n-s}, έπεται $p^s \mid |G_\Lambda|$, ειδικότερα $p^s \leq |G_\Lambda|$.

Επίσης:

$$G_\Lambda \cdot \Lambda = \Lambda \Rightarrow G_\Lambda \cdot x \subseteq \Lambda \qquad \forall x \in \Lambda$$

κι έτσι $|G_\Lambda| = |G_\Lambda \cdot x| \leq |\Lambda| = p^s$

Έπεται $\underline{|G_\Lambda| = p^s}$

□

<u>Ορισμός</u> (p-ομάδα, Sylow p-υποομάδας): Έστω p-πρώτος.

Μια πεπερασμένη ομάδα G λέγεται p-ομάδα εάν $|G| = p^k$, $k \geq 1$.

Αν $|G| = p^n m$, $\gcd(p, m) = 1$, τότε μία Sylow p-υποομάδα είναι μία υποομάδα $P \leq G$ με $|P| = p^n$ (υποομάδα μέγιστης τάξης)

Συμβολίζουμε $Syl_p(G)$ το σύνολο των Sylow p-υποομάδων, το οποίο είναι $\neq \emptyset$, από το $\boxed{\Theta}$ (Sylow).

Συμβολίζουμε $n_p = |Syl_p(G)|$ [redacted] το πλήθος των Sylow p-υποομάδων.

Τέλος μαθήματος 8

10/10/24 (ΜΑΘΗΜΑ 04)

Πόρισμα 1 (Cauchy): Έστω G πεπερ/νη ομάδα, p πρώτος διαιρέτης της τάξης $|G|$. Τότε η G περιέχει στοιχείο τάξης p.

Απόδειξη: Από το προηγούμενο θεώρημα, η G περιέχει υποομάδα H τάξης p, η οποία είναι κυκλική. Έτσι, για κάποιο $g \in G$, $|O(g)| = |\langle g \rangle| = |H| = p$. □

Πόρισμα 2: Μία πεπερ/νη ομάδα G είναι p-ομάδα $\iff$ κάθε στοιχείο της έχει τάξη δύναμη του πρώτου p.

Απόδειξη: Αν $|G| = p^n$ και $g \in G$, τότε $O(g) = p^k$, $k \leq n$.

Αντιστρόφως, αν $\forall g \in G$, $O(g) = p^k$, $k \leq n$, τότε δεν μπορεί η $|G|$ να διαιρείται από πρώτο $q \neq p$. Πράγματι, αν διαιρούνταν, από το προηγούμενο θα είχε στοιχείο τάξης q.

$\boxed{\Theta}$ (Άλλα θεωρήματα Sylow). Έστω G πεπερ/νη ομάδα τάξης $|G| = p^n m$, $\gcd(p,m) = 1$, p πρώτος. Τότε:

1) Η G έχει υποομάδα τάξης p^ν, $\forall \nu \leq n$. [Το προηγ. $\boxed{\Theta}$ (Sylow)]
2) Κάθε p-υποομάδα της G περιέχεται σε μία Sylow p-υποομάδα της G.
3) Όλες οι Sylow p-υποομάδες είναι συζυγείς μεταξύ τους στην G.
4) Αν $n_p = |Syl_p(G)|$, τότε $n_p \geq 1$ και $n_p \mid m$. Επίσης,

$n_p \equiv 1 \bmod p$.

Απόδειξη: 1) ΟΚ.

2) Έστω H p-υποομ. της G και $P \in Syl_p(G)$. Θεωρούμε τον περιορισμό στην H της φυσικής δράσης της G στα σύμπλοκα της P, δηλαδή $H \curvearrowright G/P$, $h \times gP = hgP$

Αν μία τροχιά δεν είναι μονοσύνολο, δηλαδή $|\mathcal{O}(gP)| > 1$, τότε $p \mid |\mathcal{O}(gP)|$, αφού $1 \neq |\mathcal{O}(gP)| \mid |H| = p^k$.

Αν δεν υπάρχουν τροχιές μονοσύνολα, τότε ο πρώτος p θα διαιρούσε το μήκος κάθε τροχιάς και κατά συνέπεια $p \mid |G/P| = m$ (άτοπο).

$$[\, G/P = g_1P \sqcup \cdots \sqcup g_sP \,]$$

Έπεται ότι υπάρχει τροχιά μονοσύνολο. Έστω $\mathcal{O}(gP) = \{gP\}$.
Τότε:

$$hgP = gP \ \forall h \in H \Rightarrow H \leq gPg^{-1} \in Syl_p(G)$$

3) $P_1, P_2 \in Syl_p(G)$. Από το 2, $P_1 \leq gP_2g^{-1}$. Λόγω της ίδιας τάξης, $P_1 = gP_2g^{-1}$.

4) $P \in Syl_p(G)$ και $C(P)$ η κλάση συζυγίας της P.

Από το 3, $C(P) = Syl_p(G)$, άρα:

$$n_p = |Syl_p(G)| = |C(P)| = [G : N_G(P)]$$

Επιπλέον,

$$m=[G:P]=\underbrace{[G:N_G(P)]}_{n_p}\cdot[N_G(P):P]$$

άρα $n_p \mid m$.

Θεωρούμε τη δράση της G στο $C(P)$ με συζυγίες και τον περιορισμό αυτής στην P.

Αν μια τροχιά $O(xPx^{-1})$ δεν είναι μονοσύνολο, τότε το μήκος της διαιρείται από τον p. Θα δούμε ότι η μόνη τροχιά που είναι μονοσύνολο είναι η τροχιά $O(P)=\{P\}$.

Έστω $P_1\in C(P)$, $O(P_1)=\{P_1\}$. Τότε: $gP_1g^{-1}=P_1$, $\forall g\in P$ και άρα $g\in N_G(P_1)$ $\forall g\in P \Rightarrow P\leq N_G(P)$.

Έτσι, έχουμε $P, P_1 \leq N_G(P_1)$ και $|P|=|P_1|=p^k$. Επειδή P, P_1 Sylow υποομ. της $N_G(P_1)$, οι P_1, P είναι συζυγείς στην $N_G(P_1)$. Δηλ. υπάρχει $x\in N_G(P_1)$ με $P=xP_1x^{-1}=P_1$. Τελικά $P=P_1$.

Το $C(P)$ είναι ξένη ένωση τροχιών, οπότε:

$$n_p=|C(P)|=1+\sum_{\substack{\text{όχι}\\ \text{μονοσ.}}}|O|=1+\sum_i p^{a_i}$$

Έπεται ότι $n_p\equiv 1 \mod p$.

□

<u>Πρόταση:</u> Έστω G, $|G| = p^n m$, p πρώτος, $gcd(p,m)=1$, πεπερ/νη ομάδα. Τότε:

G έχει μοναδική Sylow p-υποομάδα $\Leftrightarrow$ $P \trianglelefteq G$ κανονική

<u>Απόδειξη:</u> $n_p = 1 \Leftrightarrow n_p = [G : N_G(P)] \Leftrightarrow G = N_G(P) \Leftrightarrow P \trianglelefteq G$.

□

$\boxed{\Theta}$ Έστω G μία πεπερ/νη ομάδα, $|G| = p_1^{\nu_1} \cdots p_k^{\nu_k}$ όπου p_i πρώτοι διαφορετικοί ανά 2, και $\nu_i \in \mathbb{N}$.
Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

1) Η G είναι ευθύ γινόμενο των Sylow υποομάδων της
2) Κάθε Sylow υποομ. της G είναι κανονική.

<u>Απόδειξη:</u> (1) ⇒ (2): Εξ ορισμού, κάθε παράγοντας του ευθ. γινομ. είναι κανονική υποομάδα.

(2) ⇒ (1): Η υπόθεση (2), σημαίνει ότι για κάθε p_i υπάρχει μοναδική Sylow p_i-υποομάδα, P_i.

Εφόσον $gcd(|P_i|, |P_j|) = 1$, $i \neq j$, με διαδοχικές εφαρμογές της:

$$|HK| = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap K|}$$

προκύπτει ότι:

$$|P_1 \cdots P_k| = |P_1| \cdots |P_k| = |G|$$

και:

$$gcd\left(|P_i|, \prod_{i \neq j} |P_j|\right) = 1 \Rightarrow P_i \cap \prod_{j \neq i} P_j = \{1\}$$

Έχουμε ήδη $P_i \trianglelefteq G$, άρα $G = P_1 \times \cdots \times P_k$. □

<u>Πόρισμα</u>: κάθε πεπερασμένη αβελιανή ομάδα είναι το ευθύ γινόμενο των Sylow υποομάδων της.

<u>Πρόταση</u>: Έστω G πεπερασμένη ομάδα και p πρώτος διαιρέτης της τάξης $|G|$. Έστω P Sylow p-υποομάδα της G.

Αν $N_G(P) \leq H \leq G$, τότε $H = N_G(P)$.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $g \in N_G(H)$. Τότε $gPg^{-1} \leq gHg^{-1} = H$.

Έτσι gPg^{-1}, P Sylow p-υποομάδες της H, κι άρα συζυγείς

σε αυτήν. Δηλαδή, υπάρχει $h \in H$ με $gPg^{-1} = hPh^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow h^{-1}g \in N_G(P) \leq H \Rightarrow g \in H$, δηλαδή $N_G(H) \leq H$.

Τελικά: $N_G(H) = H$.

□

<u>Παράδειγμα</u>: κάθε πεπερασμένη ομάδα G τάξης pq (p, q πρώτοι) περιέχει κυκλική κανονική υποομάδα τάξης q. Ιδιαιτέρως, η G δεν είναι απλή.

<u>Απόδειξη</u>:
- Αν $p = q$, δηλαδή $|G| = p^2$, τότε η G είναι αβελιανή και έχουμε δει ότι περιέχει υποομ. τάξης p. Άρα, περιέχει κυκλική υποομάδα

- Αν $p \neq q$, θεωρούμε $p < q$. Έχουμε $n_q \mid p \Rightarrow n_q \in \{1, p\}$

και $n_q \equiv 1 \mod q$.

Αν $n_q = p$, $q \mid n_q - 1$, τότε $q < n_q = p$, άτοπο. Άρα $n_q = 1$.

Αυτό σημαίνει ότι η αντίστοιχη $Q \in Syl_p(G)$ είναι κανονική (αφού είναι μοναδική) και κυκλική, αφού έχει τάξη $|Q| = q$.

Τέλος μαθήματος 4