

μαθημα 07 (22/10/24) :

6 κάθε πεπερισμένη αβελιανή ομάδα είναι
παραγόμενη από πεπερισμένα κυκλικών ομάδων

Απόδειξη : Έστω G πεπερισμένη παραγ. αβελιανή ομάδα.

$k \in \mathbb{N}$ είναι η επί του G τάξη k ενός πεπερισμένου αλυσίδας
γεννητόρων της G .

• Αν $k=1$: G κυκλική

• Αν $k > 1$: Από όλα τα αλυσίδας γεννητόρων με k το n τάξης
συνιστάμε, επιλέγοντας 1, το $\{x_1, \dots, x_k\}$, με το σκεπτικό η
τάξη του x_1 , $o(x_1)$, είναι η μικρότερη δυνατή.

(ενδέχεται φυσικά $o(x_1) = \infty$). Αν $o(x_1) = 1$, τότε $x_1 = 0$,
και το $\{x_2, \dots, x_k\}$ σύνολο γεννητόρων της G .
Από την επιλεγμένη υπόθεση, έχουμε το ζητούμενο.

Αντίθετα $o(x_1) > 1$: Τότε $G = \langle x_1 \rangle \oplus \langle x_2, \dots, x_k \rangle$,
από ότι το ζητούμενο προκύπτει ουσιαστικά από την
επιλεγμένη υπόθεση. Χρειάζεται βεβαίως να δείξουμε:

• $G = \langle x_1, \dots, x_k \rangle = \langle x_1 \rangle + \langle x_2, \dots, x_k \rangle$ (αυτό είναι οκ)

• $\langle x_1 \rangle, \langle x_2, \dots, x_k \rangle \trianglelefteq G$ (άμεση λόγω του αβελιανού)

• $\langle x_1 \rangle \cap \langle x_2, \dots, x_k \rangle = \{0\}$.

Ας υποθέσουμε $\langle x_1 \rangle \cap \langle x_2, \dots, x_k \rangle \neq \{0\}$.

Τότε $\exists$ σχέση της μορφής

$$m_1 x_1 + \dots + m_k x_k = 0, \quad m_1 x_1 \neq 0$$

Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας, $m_1 > 0$

Τότε $0(x_1) \nmid m_1$ και διαίρεται $0(x_1)$, μπορούμε να υποθέσουμε $0 < m_1 < 0(x_1)$.

Έστω $d = \gcd(m_1, \dots, m_k)$. Τότε $\gcd\left(\frac{m_1}{d}, \dots, \frac{m_k}{d}\right) = 1$.

Από το προηγούμενο λήμμα, υπάρχει σύνολο γεννητόρων

$$\{y_1, \dots, y_k\} \text{ της } G \text{ τέ } y_1 = \frac{m_1}{d} x_1 + \dots + \frac{m_k}{d} x_k$$

$$\Rightarrow d y_1 = m_1 x_1 + \dots + m_k x_k = 0 \Rightarrow 0(y_1) \leq d \leq m_1 < 0(x_1),$$

από τα δύο προηγούμενα συμπεραίνει ότι $0(y_1) = d$ και άρα $0(y_1) \leq 0(x_1)$.

□

ΕΠΕΞΗΓΗΣΗ ΑΒΕΛΙΑΝΩΝ ΟΜΑΔΩΝ

Αν G πεπεσμένη αβελιανή, τότε:

$$G = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_F \oplus \underbrace{\mathbb{Z}_{m_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{m_k}}_T, \quad |T| < \infty$$

T: Η σπέρση (torsion)

F: Ελεύθερη σπέρση

ορισμός: μια αβελιανή ομάδα F λέγεται ελεύθερη αβελιανή διδιανυσμα ή αν υπάρχει $g_1, \dots, g_n \in F$ τέτοια ώστε $\langle g_i \rangle \cong \mathbb{Z}$ και

$$F = \langle g_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle g_n \rangle \\ \cong \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$$

Το λέμε:

$\{g_1, \dots, g_n\}$
 να λέγεται ελεύθερη βάση της F και το n διδιανυσμα

Υπάρχει ερώτηση για το powerful της διδιανυσμα

$$n = n(F) : F = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_n \Rightarrow 2F = 2\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus 2\mathbb{Z}$$

και

$$F/2F = \underbrace{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}_n = \mathbb{Z}_2 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_2$$

$$\Delta \Rightarrow n = \dim_{\mathbb{Z}_2} (F/2F) \quad \text{ή αυτό δικαιολογεί το powerful,}$$

Ενδεχεται να έχουμε ελεύθερες αβελιανές περικοπές ή διδιανυσμα διδιανυσμα.

Έστω $g_i, i \in I$ ορισμ. ομάδων (αυθαίρετα μεγέθη) και

$\prod_{i \in I} g_i$ το καρτεσιανό γινόμενο. Το G είναι το ελεύθερο

των $\prod_{i \in I} g_i$ που αποτελείται από τα $g = (g_i)_{i \in I}$ για τα οποία

$g_i \neq 1_{g_i}$ για πεπεσμένο αριθμό i .

Το G μας οφείλει να είναι κατά καταστάσεις απλός.

Λέγονται εξωτερικά ελεύθερο γινόμενο των G_i

$$G_i \hookrightarrow G, \quad g_i \mapsto (g_j)_{j \in I} \quad / \quad g_j = \begin{cases} g_i, & j=i \\ 1, & j \neq i \end{cases}$$

Αν υποβληθείτε με $\bar{G}_i$ την εικόνα μέσω της παραπάνω εμβύθυνσης,

$$\bar{G}_i \trianglelefteq G, \quad G = \langle \bar{G}_i, i \in I \rangle$$

$$\bar{G}_i \cap \langle \bar{G}_j, j \neq i \rangle = \{1\}$$

Συμβολίζουμε: $G = \bigtimes_{i \in I} G_i$ το εξωτερικό ελεύθερο γινόμενο.

Εν γένει: Αν $\Gamma_i \leq \Gamma, \Gamma_i \cap \Gamma_j = \{1\}, i \neq j$,

$$\Gamma = \bigtimes_{i \in I} \Gamma_i \quad \text{αν} \quad \boxed{\Gamma = \langle \Gamma_i \rangle_{i \in I} \quad / \quad \Gamma_i \leq \Gamma, \quad \Gamma_i \cap \langle \Gamma_j, j \neq i \rangle = \{1\}.}$$

Τα τρία παραπάνω είναι ισοδύναμα με τα

- Στοιχεία σε διαφορετικά Γ_i μετατίθενται
- Κάθε στοιχείο του Γ γράφεται μοναδικά: $x_1 \dots x_k \quad / \quad x_j \in \Gamma_j$

Επιπλέον συμβαίνει: $X^{\text{FS}} \Gamma_i \cong X^{\text{FS}} \Gamma_i$.

Έτσι, αν $X = \{x_i\}_{i \in I}$ άπειρο σύνολο, τότε η άνω

αβάνη με βάση το X είναι ελεύθερο αβάνη επί των $\mathbb{Z}$, ένα για κάθε γεννήτορα x_i .

$$F = \bigoplus_{i \in I} \langle x_i \rangle, \quad \langle x_i \rangle \cong \mathbb{Z}.$$

Όσον αφορά τη διδασκαλία:

Πρόταση: Έχω με απλούς R -πρότυπα με μ

-5-

από την ποσότητα X . Όλα τα ποσότητες του $\mathcal{M}$ έχουν το ίδιο μέγεθος, (μέγεθος).

Απόδειξη: Έστω γ ποσότητα $\mathcal{M}$. $\forall x \in X$, $\exists$ στοιχείο γ_x υποποσότητα του γ με $x \in \gamma_x$

$$\text{Άρα, } X \subseteq \left\langle \bigcup_{x \in X} \gamma_x \right\rangle \Rightarrow \mathcal{M} = \left\langle \bigcup_{x \in X} \gamma_x \right\rangle$$

Ας υποθέσουμε ότι $\exists y \in \gamma \setminus \bigcup_{x \in X} \gamma_x$. Τότε: το y

σπάει σε n διαδοχικά στοιχεία x_i και $x_i \in \gamma_{x_i}$. Άρα $y \in \left\langle \bigcup_{x \in X} \gamma_x \right\rangle$ (απόδειξη).

Έτσι: $\gamma = \bigcup_{x \in X} \gamma_x$ και έχουμε:

$$|\gamma| = \left| \bigcup_{x \in X} \gamma_x \right| \leq \sum_{x \in X} |\gamma_x| = |X| \cdot |\gamma_x| = |X| \cdot |\gamma_x|$$

$\uparrow \quad |\gamma_x| \geq |\gamma_x|$

Οπότε, $|\gamma| \geq |X|$ και άρα τελικά $|X| = |\gamma|$. $\square$

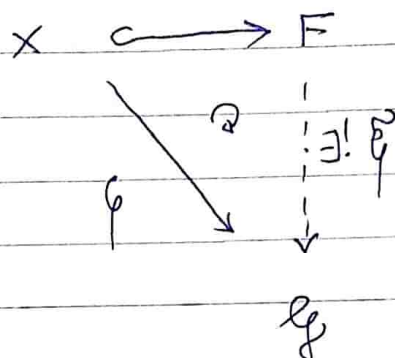
Πώς μετράμε το γ

μαθημα 08 (24/10/24):

ΚΑΘΟΛΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΕΛΕΥΘΕΡΩΝ ΑΒΕΛΙΑΝΩΝ

Πρόταση:

Έστω F ελεύθερη αβελιανή $\mathbb{Z}$ -μάζα με βάση $X = \{x_i \mid i \in I\}$. Τότε για κάθε αβελιανή E και για κάθε αριθμώνιμη $\varphi: X \rightarrow E$, $\exists!$ ομομορφ. $\tilde{\varphi}: F \rightarrow E$ με $\tilde{\varphi}(x_i) = \varphi(x_i) \quad \forall i \in I$.



Παρ. $\exists!$ ομομορφισμός που επέκτεινε την φ .

Απόδειξη: $\exists$ κάθε $g \in F$ προκύπτει κατά μοναδικό τρόπο ως:

$$g = \sum_{i=1}^k m_i x_i, \quad x_i \in X.$$

Ορίζουμε $\tilde{\varphi}(g) = \sum_{i=1}^k m_i \varphi(x_i)$.

Παρατηρούμε ότι $\tilde{\varphi}$ ομομορφ., $\tilde{\varphi}(x_i) = \varphi(x_i) \quad \forall i \in I$.

Είναι μοναδικός διότι καθορίζεται πλήρως από τις εικόνες των $\varphi(x_i)$. □

Πρόταση: Κάθε αβελιανή E είναι ημιελεύθερη αβελιανή.

Απόδειξη: Έστω $\{g_i\}_{i \in I}$ α.μ.σ. γεννητόρων της E .

Θεωρούμε την ελεύθ. αβελιανή F επί της X

με βάση $X = \{x_i \mid i \in I\}$

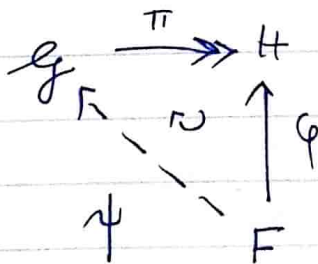
$$F = \bigoplus_{i \in I} \langle x_i \rangle \quad / \quad \langle x_i \rangle \cong \mathbb{Z}$$

Από προηγ. πρόταση, $\exists!$ ομομορφ. $\varphi: F \rightarrow G$ που ενεργεί ως $x_i \mapsto g_i$. Ο ομομορφ. φ είναι επί γιατί η $\text{Im } \varphi$ περιέχει το $\omega \omega = \text{span} \{g_i\}$. $\square$

Παρατήρηση: Αν G αβελιανή, $G = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$, τότε από τα προηγούμενα προκύπτει ότι έχουμε επιμορφισμό $\varphi: F \rightarrow G$, που F ελεύθερη αβελιανή δίνουμε η :

$$\underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_n = \mathbb{Z}^n.$$

Θ Υποθέτουμε ότι έχουμε $\pi: G \rightarrow H$ επιμορφισμό αβελιανών ομάδων, F ελεύθερη αβελιανή και ομομορφ. $\varphi: F \rightarrow H$.
Τότε $\exists \psi: F \rightarrow G$ ομομορφ. τ.ω. $\varphi = \pi \circ \psi$.



Απόδειξη: Έστω $x = \{x_i\}_{i \in I}$ βάση της F .

Έστω $\pi: G \rightarrow H$, $\forall x_i \exists g_i \in G$ $\vdash \pi(g_i) = \varphi(x_i)$
Από τις κανονικές ιδιότητες, η αντιστοιχία $x_i \mapsto g_i$ ενεργεί ως ομομορφ. $\psi: F \rightarrow G$.

Επομένως μας $\vdash$, $\varphi(x_i) = \pi \circ \psi(x_i) \quad \forall x_i$. $\square$

Λήμμα: Έστω F ελεύθερη αβελιανή / $\mathbb{Q}$ αβελιανή, $\pi: G \rightarrow F$ επιμορφισμός. Τότε $G = \ker \pi \oplus H$, $H \cong F$.

$$1 \hookrightarrow \ker \pi \rightarrow G \xrightarrow{\pi} F \rightarrow 1$$

Απόδειξη: Από το προηγούμενο, υπάρχει ομομορφισμός $q: F \rightarrow G$ τέτοιος ώστε $\pi \circ q = \text{id} \Rightarrow q \text{ ισομορφισμός.}$

Θα δείξω ότι $G = \ker \pi \oplus \text{Im } q$, δηλαδή $H \cong F$ είναι η $\text{Im } q$.

• $\ker \pi \cap \text{Im } q = \{0\}$: Έστω $g \in \ker \pi \cap \text{Im } q$. Τότε $\pi(g) = 0$ και $g = q(x)$ για κάποιο $x \in F$. Άρα, $0 = \pi(g) = \pi(q(x)) = x \Rightarrow g = q(x) = 0$.

• $G = \ker \pi + \text{Im } q$: Έστω $g \in G$. Τότε $\pi \circ g = \pi(g) \in F$. $\Rightarrow g - q(\pi(g)) \in \ker \pi$. Δηλαδή: $g = \underbrace{g - q(\pi(g))}_{\in \ker \pi} + \underbrace{q(\pi(g))}_{\in \text{Im } q}$

□ Έστω F ελεύθερη αβελιανή, $\dim F = n$ και $\{0\} \neq H \leq F$. Τότε η H είναι ελεύθερη αβελιανή διάστασης $\leq n$. □

Απόδειξη: Με επαγωγή επί του n . Αν $n=1$, τότε F κυκλική και H κυκλική (διαιρέση).

$$\text{Υποθέτουμε } n > 1. \text{ Θεωρούμε } F = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_n \oplus \mathbb{Z} = \Gamma \oplus \mathbb{Z}$$

Αν $H \leq \Gamma$, από την επαγωγή υπάρχει ένα στοιχείο $h \in H$.

Έστω $H \not\leq \Gamma$. Θεωρούμε $\pi: F \rightarrow \mathbb{Z}$ τον φυσικό επιμορφισμό με $\ker \pi = \Gamma$ και τον περιορισμό $\pi|_H: H \rightarrow \mathbb{Z}$.

Αφού $H \not\leq \ker \pi$, $\pi(H) \neq \{0\}$ και είναι διαιρέση κυκλική. Κατά συνέπεια, $\pi|_H: H \rightarrow \text{Im } \pi|_H \cong \mathbb{Z}$

- 4 -

Από το προηγ: $H = \ker \pi_H \oplus \operatorname{Im} \pi_H$
 $= \ker \pi_H \oplus \mathbb{Z}$, $\ker \pi_H = H \cap \Gamma \leq \Gamma$
 $= \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{m \leq n-1} \oplus \mathbb{Z}$ □

Πρόταση: Αν μία πεπερα παραγ. αβελιανή ομάδα G παραχθεί από n το πολύ στοιχεία, τότε κάθε υποομάδα $H \leq G$ μπορεί να παραχθεί από n το πολύ στοιχεία

Απόδειξη: Έστω $G = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$, τότε $\exists$ ομορφ. $\varphi: F \rightarrow G$, F ελεύθερη αβελιανή διάστασης n .

Ορίζουμε: $G \cong F/N$, $N = \ker \varphi$. $H \leq G$, άρα $\exists$ Θ της αλληλοχώρας να έχει τη μορφή:

$$H = \Gamma/N, \quad \Gamma \leq F$$

και ανάλυση Γ ελεύθερη αβελιανή διάστασης $\leq \dim F = n$.

Από Γ παραχθούν από $k \leq n$ στοιχεία, το ίδιο συμβαίνει και για την $\Gamma/N = H$. □

Τέλος παρατήρησης ☺

