

μαθημα 09 (29/10/24)

Πρόταση: Η ελεύθερη αβελιανή $\mathbb{Z}^n = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_n$, διάστασης n δεν μπορεί να παραχθεί από $k < n$ στοιχεία.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι $\mathbb{Z}^n = \langle g \rangle$ παραχθεί από k ως πολύ μικρότερα στοιχεία. Τότε $\exists$ ομομορφισμούς $\mathbb{Z}^k \xrightarrow{\pi} g = \mathbb{Z}^n$ και $\mathbb{Z}^k = \ker \pi \oplus \text{Im } g$, όπου $g: \mathbb{Z}^k \rightarrow \mathbb{Z}^n$ ομομορφισμός.

Επειδή $\mathbb{Z}^k = \ker \pi \oplus \mathbb{Z}^n$, όπως $\ker \pi$ ελεύθερη αβελιανή διάστασης $\leq k$. Τελικά $k \geq n$ $\square$

Πρόταση: Έστω F ελεύθερη αβελιανή πεν. διάστασης και $H \leq F$. Τότε F/H πεπερασμένη $\Leftrightarrow \dim F = \dim H$

Απόδειξη: Έστω $F = \mathbb{Z}^n = \langle x_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle x_n \rangle$, $\langle x_i \rangle \cong \mathbb{Z}$.

Υποθέτουμε $[F:H] = |F/H| = m < \infty$.

Τότε: $g^m = mg \in H$ $\forall g \in F$
 $\hookrightarrow$ η μ.ν. αλληλοχρήσιμη

Η αντιστροφή $F \rightarrow H$, $g \mapsto mg$ είναι ομομορφ. & $\neq 1$, αφού F ελεύθερη απρόπληκτη. Συνεπώς $F \cong \text{Im } g \leq H$
 $\Rightarrow \dim F \leq \dim H \leq \dim F \Rightarrow \underline{\dim F = \dim H}$

Αντιστροφή: Υποθέτουμε ότι $H \cap \langle x_i \rangle = \{0\}$, να κατανοήσουμε ότι.

Λέει $\pi_i: F \rightarrow \langle x_i \rangle$ ο φυσικός ομομορφισμός, τότε $H \subseteq \ker \pi_i = \langle x_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle x_{i-1} \rangle \oplus \langle x_{i+1} \rangle \oplus \dots \oplus \langle x_n \rangle$ και $\dim H \leq \dim \ker \pi_i = n-1$. Από την άποψη, αφού $\dim H = \dim F = n$.

Επειδή $H \cap \langle x_i \rangle \neq \{0\}$ για κάποιο i , αφού εμφανίζεται ότι $\exists m_i \neq 0$, $m_i x_i \in H$

Let $m = m_1 \cdot \dots \cdot m_n$. Take $u_j \in F$ Exempt:

$$m_g = m\left(\sum_{i=1}^n v_i x_i'\right) = \sum_{i=1}^n v_i \underbrace{m x_i'}_{\in H} \in H \quad / \text{Korollar HSF.}$$

Έλεγχος: Η τάση κατά μήκος της F/H είναι περίπου 5m.
Από το θεωρητικό δοχείο που αντιπροσώπευε τον αβάντιο φάσμα,
προκύπτει F/H περίπου. □.

Өлсүрүт үр Салсүрүт 70 жаш:

Tipsteren: H o p a l s r A n e h a n a n d y t u n g s .

Για $n=3$, $|A_3|=3 \rightarrow \text{κυκλική} \cong \mathbb{Z}_3$. (από 4)

$\Gamma_9 \quad n=4, \quad |A_4| = 12 = 2^2 \cdot 3 \rightarrow \text{Struktur aus } (X \cup T \mid p^2)$

Λύση 1: Για $n \geq 3$ η A_n παράγει τον αριθμό 3.

Ansatz: Infinitesimal ist Karte kleiner als 3 auf der
um An. Karte parallel um An gedreht
als größtes drehen nicht auszufallen.

① Τοξικοποιεί το διάφορο έκτομα από το αλκοόλ και η γαλακτοκομία

- $(\alpha, \beta)(\beta, \gamma) = (\alpha, \beta, \gamma)$
- $(\alpha, \beta)(\gamma, \delta) = (\alpha, \beta)(\beta, \gamma)(\beta, \gamma)(\gamma, \delta) = (\alpha, \beta, \gamma)(\beta, \gamma, \delta)$

□

Alpha 2: Also known as the "alpha 2" or "alpha 2" in the alpha 2 series.

Условия: Сформул. 2 вектора $(\alpha_1, \dots, \alpha_m), (\beta_1, \dots, \beta_m)$.

Es sei $\{x_1, \dots, x_n\} = \{1, \dots, n\} \setminus \{a_1, \dots, a_m\}$ bzw.

Θα ποτέ κι η φιλία σου σ' που σ' αγαπάει κι εγώ!

$$\sigma(\alpha v) = p v, \quad \sigma(\gamma v) = \delta v$$

και παρατηρούμε: $\sigma(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \sigma^{-1} = (\beta_1, \dots, \beta_m)$

□

Λήμμα 3: Δύο κύκλοι μήκους 3 είναι συγγενείς στην A_n , $n \geq 5$.

Απόδειξη: Έστω (α, β, γ) , ρ , δύο κύκλοι μήκους 3.

Από το προηγ. λήμμα, $\exists$ μεταστροφή $\pi \in S_n$ τέ

$$(\pi, \beta, \gamma) = \pi \rho \pi^{-1}.$$

• Αν $\pi \in A_n$, οκ.

• Αν $\pi \notin A_n$, τότε $(\delta, \varepsilon) \pi \in A_n$, όπου $\delta, \varepsilon \notin \{\alpha, \beta, \gamma\}$

$$\begin{aligned} \text{Έτσι, } (\delta, \varepsilon) \pi \rho \pi^{-1} (\delta, \varepsilon)^{-1} &= (\delta, \varepsilon) (\pi, \beta, \gamma) (\delta, \varepsilon) = (\delta, \varepsilon)^2 (\alpha, \beta, \gamma) \\ &= (\alpha, \beta, \gamma) \end{aligned}$$

Θεώρημα: Για $n \geq 5$, η A_n ανήκει

Απόδειξη: Έστω $1 \neq N \trianglelefteq A_n$ κανονική μη-τετριπτη υποομάδα της A_n , $n \geq 5$.

Θα δ-ο. η N περιέχει κύκλο μήκους 3 και έτσι, ως κανονική, θα περιέχει κάθε κύκλο μήκους 3, αφού οι κύκλοι μήκους 3 είναι συγγενείς στην A_n . Όμως η A_n παράγεται από κύκλους μήκους 3, συνεπώς $N = A_n$.

$$\text{ΕΝ ΕΝΣΑΝ}$$

$\forall \sigma \in N$, $\pi \in A_n$, παρατηρούμε $\sigma^{-1} \pi \sigma \pi^{-1} \in N$. Θα «κινδυνεύει» κύκλος μήκους 3 στην N να μεταβληθεί,

στη σχέση θεωρούμε ανατάξεις των μεταθέσεων της N ως πρώτες στην ανά 2 κύκλων. Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

— 4 —

1) Η N περιέχει το σ της μορφής: $\sigma = \tau(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$
 p

$k \geq 4$, τ, p γίγες.

Τότε για $\pi = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ έχουμε $\sigma^{-1} \pi \sigma \pi^{-1} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in N$

2) Η N περιέχει στοιχείο της μορφής $\tau(\alpha, p, \gamma)(\delta, \epsilon, \eta)$
 $\tau_1 \quad \tau_2$

τ_1, τ_1, τ_2 γίγες. Τότε για $\pi = (\alpha, p, \gamma)$, $\sigma^{-1} \pi \sigma \pi^{-1} = (\alpha, \delta, p, \eta, \gamma) \in N$

Από την πρώτη περίπτωση, η N περιέχει κύκλο μήκους 3.

3) Η υποομάδα N περιέχει $\sigma = \tau(\alpha, p, \gamma)$, τ, τ_1 γίγες,
 τ_1

τ γίγας γίγας αντιμεταθετικών. Τότε:

$$\sigma^2 = \tau^2(\alpha, p, \gamma)^2 = (\alpha, \gamma, p) = (\alpha, \gamma, p) \in N$$

4) $N \ni \sigma = (\alpha, p)(\gamma, \delta)$, γίγας αντιμεταθετικός. Τότε για $\pi = (\alpha, p, \epsilon)$
 δ που $\epsilon \notin \{\alpha, p, \gamma, \delta\}$, $\sigma^{-1} \pi \sigma \pi^{-1} = (\alpha, p, \epsilon) \in N$

5) $N \ni \sigma = (\alpha_1, \beta_1) \dots (\alpha_k, \beta_k)$, k άρτιος, γίγας
 αντιμεταθετικός. Τότε:

$$\sigma^{-1}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2) \sigma(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2)^{-1} = (\alpha_1, \alpha_2)(\beta_1, \beta_2)$$

και από το (4) έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Τέλος φύλλου 9