

Δευτέρα 15/12/2025

Διάλεξη 18

Θεώρημα:

Κάθε αριθμητική ομάδα εμμεύεται σε απλή ομάδα με 6 γεννήτορες.

Απόδειξη:

Εστω C αριθμητική. Την εμμεύουμε σε απλή ομάδα S , δηλαδή $C \hookrightarrow S$. Παιρνουμε $S * \{x\} \hookrightarrow \langle u_1, u_2 \rangle$, όπου u_1, u_2 2 γεννήτορες άπειρης τάξης (x εντός της S).

$$J = \langle u, y_1, y_2 \mid y_1^{-1} u_1 y_1 = u^2, y_2^{-1} u_2 y_2 = u^2 \rangle$$

$$Q = \langle r, s, t \mid s^{-1} r s = r^2, t^{-1} s t = t^2 \rangle$$

$$P = \langle r, s \mid s^{-1} r s = r^2 \rangle, U := \langle u_1, u_2 \rangle$$

P είναι HNN-επέκταση της S

Q είναι HNN-επέκταση της P

Τότε $\langle r, t \rangle \cong F_2$. Παιρνουμε $w \in S - \{1\}$. Το $[w, x]$ έχει άπειρη τάξη στο U .

$$K = \langle J, z \mid z^{-1} y_1 z = y_1^2, z^{-1} y_2 z = y_2^2 \rangle$$

Τα $[w, x]$ και z παράγουν ελεύθερη υποομάδα της K .

$$D = \langle K * Q \mid r = z, t = [w, x] \rangle$$

Τώρα $N \triangleleft D \Rightarrow N \cap S = \{1\}$ ή $N = D$.

Εστω M μέγιστη ως προς $M \cap S = \{1\}$.

Τότε $S \hookrightarrow D/M$ απλή. Η D έχει 6 γεννήτορες. ■

$$G *_{\varphi}, \quad \varphi: G \xrightarrow{\cong} G$$

$$G *_{\varphi} = \langle G, t \mid t g t^{-1} = \varphi(g) \rangle \cong G \rtimes_a \mathbb{Z}$$

$$a: \mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(G), \quad a(t) = \varphi \quad (\text{δουνηση})$$

Γράφηματα

Γράφημα { κορυφές, ακμές } Ένα γράφημα είναι «κατευθυνόμενο», αν $e = (v_1, v_2)$ ακμή είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος ($v_1 = \text{αρχή}$, $v_2 = \text{ουρά}$) κορυφών.

Από γράφημα δεν είναι κατευθυνόμενο και δεν έχει βρόχος (δηλαδή ακμές (v, v) και πολλαπλές ακμές μεταξύ 2 κορυφών.

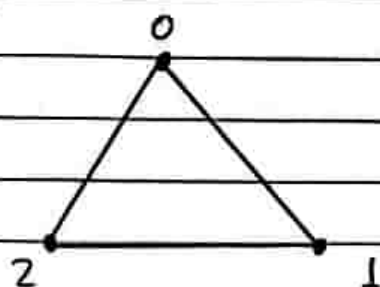
Γραφήματα Cayley:

(G, S) , $S =$ σύνολο γεννητόρων, $S^{-1} = S$

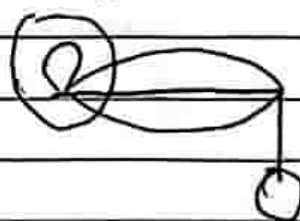
Ορίζουμε γράφημα $\Gamma(G, S) = \Gamma$, $V(\Gamma) = G$, (g, gs) ακμή, $s \in S$.

Παραδείγματα:

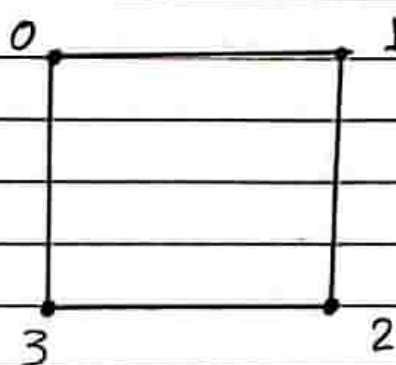
$\Gamma(\mathbb{Z}_3, \pm 1)$



Βρόχος:



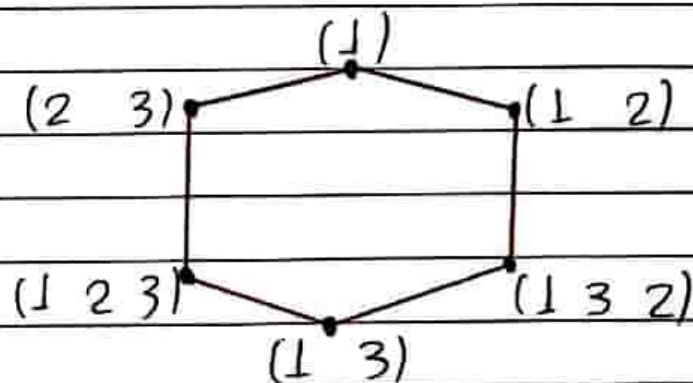
$\Gamma(\mathbb{Z}_4, \pm 1)$



⋮

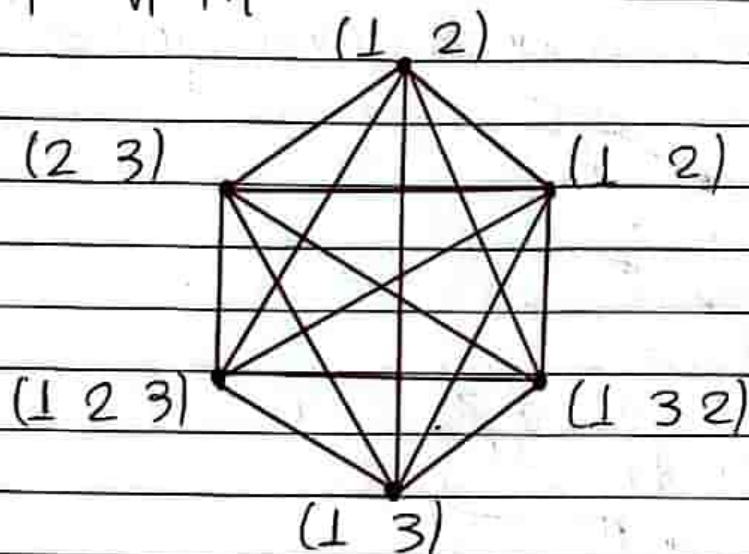
$(\mathbb{Z}_n, \pm 1)$: κύκλος με n κορυφές

$S_3 = D_6 < (1\ 2), (2\ 3) >$



$$S_3 = \langle (1\ 2), (2\ 3), (1\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2) \rangle$$

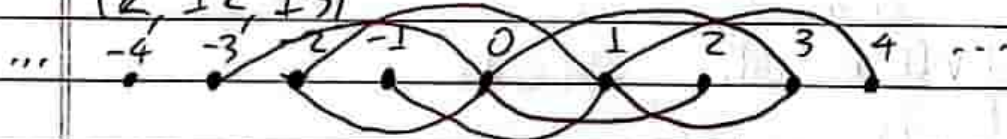
Πλήρες γραφήμα:



$(\mathbb{Z}, \pm 1)$ "άπειρο μονοπάτι"

... -2 -1 0 1 2 ...

$(\mathbb{Z}, \pm 2, \pm 3)$



Μονοπάτι:

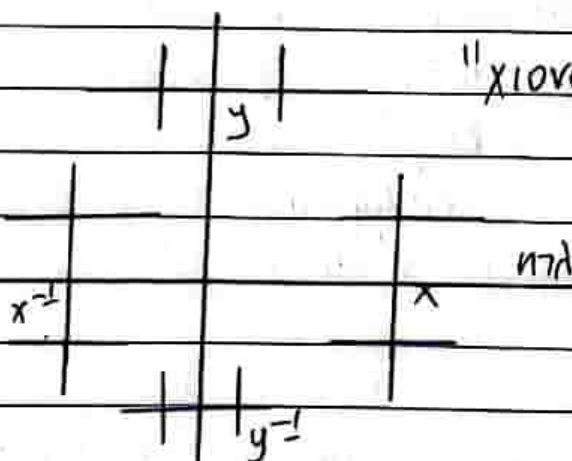
$(v_0, v_1, v_2, \dots, v_n)$, όπου (v_i, v_{i+1}) ακμή (edge path)

Κύκλωμα ή κλειστό μονοπάτι: $v_n = v_0$

Δέντρο: Γράφημα χωρίς κύκλωματα, που είναι συνεκτικό

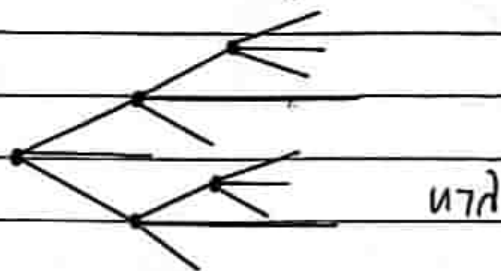
Δάσος: Συλλογή δέντρων

$$F_2(x, y), \Gamma(F_2, \{x^{\pm 1}, y^{\pm 1}\})$$



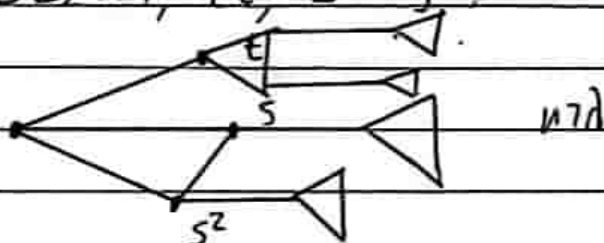
"χιονοστιβάδα" (είναι δέντρο)
4-κλωνικό

Βαθμός: $\deg v = \# \text{ γειτονιών των κορυφών } v_1, v_2 \text{ γειτονικά, αν } (v_1, v_2) \text{ αληθ}$
 d -κανονικό: $\deg v = d, \forall v \text{ κορυφή}$



$$\text{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3 = \langle t, s \rangle$$

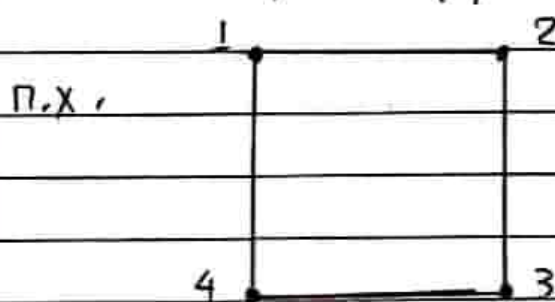
$$(\text{PSL}_2(\mathbb{Z}), \{t, s^{\pm 1}\})$$



Γ από πεπερασμένο γράφημα
 Πίνακας γειτονίας του Γ , A $n \times n$
 $n = |V(\Gamma)|$ (πλήθος κορυφών)
 $V(\Gamma) = \{v_1, \dots, v_n\}$

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \sim v_j \text{ (γειτονικό)} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$A_{ij} = A_{ji} \text{ (για από γραφήματα)}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

συμμετρικός πίνακας $\Rightarrow$ πραγματικές ιδιοτιμές
 Ισομορφα γράφηματα έχουν τον ίδιο πίνακα.
 $\text{spec}(\Gamma) = \text{spec}(A) = \{\lambda \mid \lambda \text{ ιδιοτιμή του } A\}$ ("φάσμα")
 Υπάρχουν μη ισομορφα γράφηματα που έχουν το ίδιο spectrum
 ("δεν μπορούμε ν' αμυνόμαστε τον ηχο του γραφήματος").

$$L^2(\Gamma) = \{f: V \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_{v \in V} |f(v)|^2 < +\infty\}$$

Δίνουμε σ' αυτό το χώρο ένα εσωτερικό γινόμενο.

$$\langle f, g \rangle := \sum_{v \in V} f(v) \overline{g(v)}$$

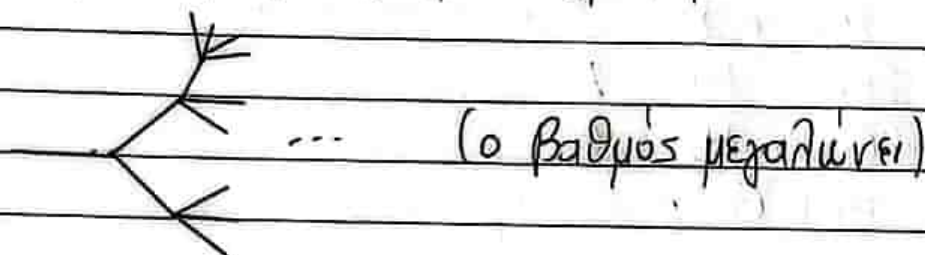
$L^2(\Gamma)$ είναι χώρος Hilbert

$$A: L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma)$$

$$A(f)(v) = \sum_{u \sim v} f(u)$$

$L^2(\Gamma)$ φραγμένος $\Leftrightarrow$ οι βαθμοί είναι φραγμένοι

Παράδειγμα μη φραγμένου γραφήματος:



Έστω ότι $\Gamma = \Gamma(G, S)$ Cayley γραφήμα. Τότε η G δρα στο γραφήμα Γ .

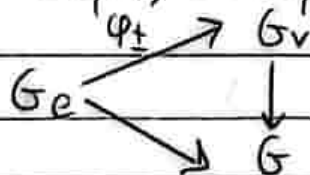
$$V(\Gamma) = G$$

$g \in G, x \in V(\Gamma), gx \in V(\Gamma)$ ελεύθεροι

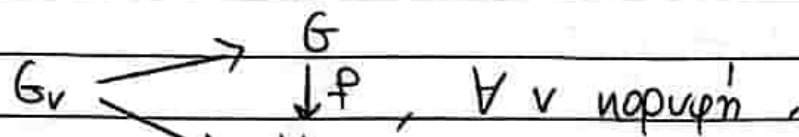
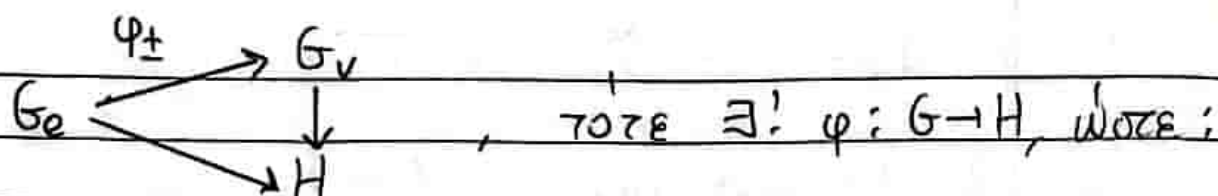
Έστω Γ γραφήμα. Γράφουμε $e = (e_+, e_-)$ (μοιτελωνόμενα). Μπορεί να $e_+ = e_-$ (σ' αυτή την περίπτωση επιτρέπεται να έχουμε βρόχους). Αντιστοιχούμε ομάδες σε κάθε κορυφή και κάθε ακμή και μονομορφισμούς $\varphi_+: G_e \rightarrow G_{e_+}, \varphi_-: G_e \rightarrow G_{e_-}$. Αυτή η κατασκευή λέγεται «γραφήμα ομάδων».

Η θεμελιώδης ομάδα του γραφήματος είναι G , αν:

- 1) οι ποσότητες συμβατών ομομορφισμών $G_e \rightarrow G, G_v \rightarrow G$, e ακμή, v κορυφή



- 2) G καθορίζεται ως προς αυτή την ιδιότητα.
Δηλαδή $G_v \rightarrow H, G_e \rightarrow H$ για κάθε κορυφή v και ακμή e έτσι ώστε:



$$\boxed{G = \pi(G)}$$
 μοναδική

(1) $\Gamma = \{e_+, e_-\}$ $e_+ \xrightarrow{e} e_-$

$\varphi_{e_-}(G_e) = H_1 \leq G_1$

$\varphi_{e_+}(G_e) = H_2 \leq G_2$

Τότε $\pi_1(G) = G_1 *_{H_1=H_2} G_2$

(2)  Παιρνουμε 2 κατευθύνσεις.

$\varphi_{e_-}(G_e) = H_1 \leq G$

$e_+ = e_-$ $\varphi_{e_+}(G_e) = H_2 \leq G$

Τότε: $\pi_1(G) = G *_{H_1=H_2} G$

Πώς παίρνουμε παράσταση ομάδας;

$$\ker p \longrightarrow F \xrightarrow{p} G$$

$\hookrightarrow$ ελεύθερη

$G \cong F / (\ker p)$ σχέσεις είναι οι γεννήτορες της $\ker p$ σαν κανονική υποομάδα της F

Δύο παραστάσεις της ίδιας ομάδας συνδέονται με Tietze κινήσεις (Tietze moves).

(T1) Αναδιάταξη των γεννητόρων.

(T2) Προσθέτουμε ή αφαιρούμε την σχέση e .

(T3) Επιτελούμε στοιχειώδη διαστολή ή συστολή της σχέσης r
 $\Gamma w = y_1 x x^{-1} y_2$, $w' = y_1 y_2 \Rightarrow w \searrow w'$ ή $w' \nearrow w$.

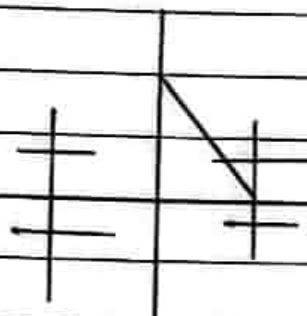
(T4) Προσθέτουμε μία σχέση r_i ή την αντίστροφή της σε μία σχέση r_j (ή την αφαιρούμε).

(T5) Προσθέτουμε γεννήτορα x_{m+1} και τη σχέση $w(x_1 \dots x_m)^{-1} x_{m+1}$, όπου $w(x_1 \dots x_m)^{-1}$ λέξη.

n.x. $F_2 = \langle x, y \rangle$
 $F_2 = \langle x, y, z \mid z = xy \rangle$ } 1515

$S = \{x^{\pm 1}, y^{\pm 1}\}$ 4-направление

$S = \{x^{\pm 1}, y^{\pm 1}, z^{\pm 1}\}$ 6-направление



$\langle a, b \mid abab^{-1} \rangle \rightarrow \langle b, c \mid cbbc \rangle$

$\langle a, b \mid abab^{-1} \rangle \xrightarrow{T^5} \langle a, b, c \mid abab^{-1}, ab^{-1}c^{-1} \rangle \rightarrow$

$\xrightarrow{T^4} \langle a, b, c \mid (ab^{-1}c^{-1})^{-1} abab^{-1}, ab^{-1}c^{-1} \rangle \rightarrow$

$\xrightarrow{T^4} \langle a, b, c \mid (ab^{-1}c^{-1})^{-1} ab(ab^{-1}c^{-1})^{-1} ab^{-1}, ab^{-1}c^{-1} \rangle \rightarrow$

$\xrightarrow{T^3} \langle a, b, c \mid cbbc, ab^{-1}c^{-1} \rangle \rightarrow$

$\xrightarrow{T^2} \langle a, b, c \mid cbbc, ab^{-1}c^{-1}, c \rangle \rightarrow$

$\xrightarrow{T^4} \langle a, b, c \mid cbbcab^{-1}c^{-1}, (ab^{-1}c^{-1})^{-1} \rangle \rightarrow$

$\xrightarrow{T^4} \langle a, b, c \mid cbbc, ab^{-1}c^{-1}(ab^{-1}c^{-1})^{-1}, (ab^{-1}c^{-1})^{-1} \rangle \rightarrow$

$\xrightarrow{T^3} \langle a, b, c \mid cbbc, e, (ab^{-1}c^{-1})^{-1} \rangle \rightarrow$

$\xrightarrow{T^2} \langle a, b, c \mid cbbc, cbac^{-1} \rangle \rightarrow$

$\xrightarrow{T^2} \langle b, c \mid cbbc \rangle$

Δευτέρα 22/12/2025

Διάλεξη 20

Ένα γράφημα ονομάζεται «δέντρο», αν δεν έχει κυκλώματα (κλειστά μονοπάτια, edge paths). Τα δέντρα θέλουμε να είναι συνεκτικά (κάθε 2 κορυφές συνδέονται με ένα μονοπάτι).

Ένα μέγιστο δέντρο σ' ένα γράφημα είναι ένα υπογράφημα που είναι δέντρο και δεν περιέχεται σε άλλο δέντρο.

Κάθε γράφημα περιέχει ένα μέγιστο δέντρο.

Εστω Γ γράφημα και $\mathcal{T}$ το σύνολο των υποδέντρων του Γ διατεταγμένα με την περιεκτικότητα. ($\mathcal{T} \neq \emptyset$) Τότε αν πάρουμε μια αλυσίδα υποδέντρων $T_1 \subseteq T_2 \subseteq \dots \subseteq T_n \subseteq T_{n+1} \subseteq \dots$, τότε η ένωση $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$ είναι δέντρο και απ' το λήμμα του Zorn, $\exists$ μέγιστο δέντρο! (υπάρχουν ενδεχομένως περισσότερα από 1 μέγιστα δέντρα)

Λήμμα:

(συνεκτικό)

Ένα μέγιστο δέντρο T στο Γ περιέχει όλες τις κορυφές του Γ .

Απόδειξη:

Εστω ότι $\exists v \in V(T), v \notin T$. Τότε $\forall x \in V(T) \exists$ μονοπάτι απ' το x στο v (στο Γ) και $\exists$ μονοπάτι $P = \{x_1, \dots, x_n, v\}$ ελάχιστου μήκους. Για όλα τα $y \in P, y \neq x_1 \in V(T)$, το $y \notin V(T)$. Διαφορετικά το μονοπάτι $\{y, x_1, \dots, x_n, v\}$ θα είχε μικρότερο μήκος απ' το P . Επειδή αν ενώσουμε μονοπάτια στο T θα έχουμε πάλι δέντρο, τότε $T \cup P$ θα ήταν μεγαλύτερο δέντρο απ' το T , άτοπο. ■

$G = \langle S \rangle$ ομάδα

$\Gamma(G, S)$ Cayley γράφημα της G

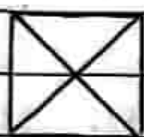
$V(\Gamma(G, S)) = G$

$g \sim h \Leftrightarrow gs = h, s \in S \cup S^{-1}$

Λήμμα:

$\Gamma(G, S)$ συνεκτικό $\Leftrightarrow S$ παράγει την G

π.χ. $(C_4, \{1, 2, 3\})$ προσδετικά



(Cayley γράφημα)

π.χ. $(C_4, \{1, 3\})$



(Cayley γράφημα)

Τοπικά πεπερασμένο: Σε κάθε κορυφή καταλήγουν πεπερασμένες ακμές. (Με άλλα λόγια, στα παραπάνω θέλουμε S πεπερασμένο.)

Schreier γράφημα για $H < G, S \subseteq G$:

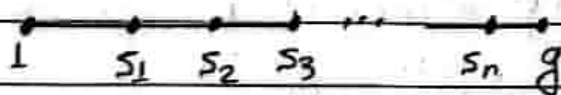
$Sch(G/H, S)$

$V(Sch(G/H, S)) = G/H$

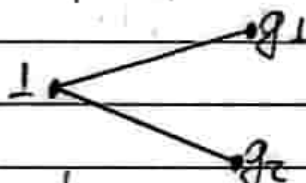
$g_1 H \sim g_2 H \iff \exists s \in S : g_1 H = s g_2 H$

Απόδειξη λήμματος:

" $\Rightarrow$ " Αν $\Gamma(G, S)$ συνεκτικό, τότε $\exists$ μονοπάτι απ' το 1 στο $g, \forall g \in G$. Τότε $g = s_n \dots s_2 s_1$.



" $\Leftarrow$ " Άσκηση: Παρατηρήστε π.χ. το ακόλουθο.



μονοπάτι απ' το g_1 στο g_2 ■

Κλειστά μονοπάτια στο $\Gamma(G, S)$ αντιστοιχούν σε σχέση στην G .

Λήμμα:

Αν $\Gamma(G, S)$ είναι δέντρο, τότε η G είναι ελεύθερη ομάδα με σύνολο γεννητόρων S και αντίστροφα!

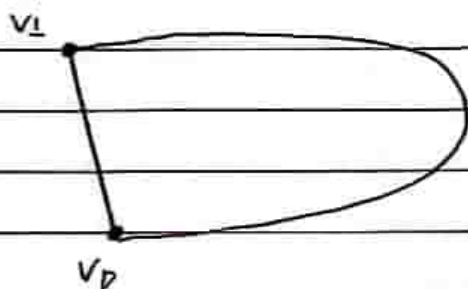
Απόδειξη:

" $\Leftarrow$ "

Αν G ελεύθερη με γεννήτορες στο S , τότε $g = a_1^{e_1} a_2^{e_2} \dots a_k^{e_k}$, $g \in G$, με $a_i \in S$, $e_i = \pm 1$ και $e_i = e_i \pm 1$ αν $a_i = a_i^{-1}$. Επειδή S παράγει την G , το $\Gamma(G, S)$ είναι συνεκτικό. Αν $\Gamma(G, S)$ δεν ήταν δέντρο, τότε θα περιείχε ένα κλειστό μονοπάτι. Επομένως $\{v_1, v_2, \dots, v_p, v_1\}$ στο $\Gamma(G, S)$ (μη τετριμμένο). Τότε θα είχαμε 2 διαφορετικά μονοπάτια απ' το v_1 στο v_p .

$$a_1 a_2 \dots a_n (v_1) = v_p$$

$$b(v_1) = v_p$$



Τότε στην G : $a_1 \dots a_n (v_1) = b(v_1)$, άρα $a_1 \dots a_n = b$, άρα G έχει δέντρο $\Rightarrow G$ έχει ελεύθερη!

" $\Rightarrow$ "

Αν Γ δέντρο, τότε $G = \langle S \rangle$, γιατί Γ συνεκτικό. Αν G όχι ελεύθερη, τότε $\exists \hat{g} \neq 1 \in F(S)$ τέτοιο, ώστε η εικόνα του $\hat{g}$ στην G είναι 1 ($F(S) \rightarrow G$, $\hat{g} \mapsto 1$). Επιλέγουμε το $\hat{g}$ να είναι ελάχιστου μήκους, $\hat{g} = a_1^{e_1} \dots a_n^{e_n}$. Τότε όμως παίρνουμε $a_1^{e_1} \dots a_n^{e_n} (1) = 1$ που είναι κλειστό μονοπάτι απ' το 1 στο 1 , άρα G ελεύθερη.

$\Rightarrow$ ελεύθερα

G δρα στο $\Gamma(G, S)$ (χένια) και $G \times V(\Gamma(G, S)) \rightarrow V(\Gamma(G, S))$

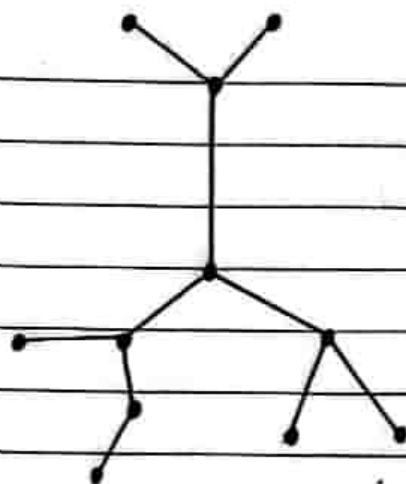
Αν $g_1 \sim g_2$, τότε $gg_1 \sim gg_2$.

Άρα αν G ελεύθερη, τότε δρα σε δέντρο ελεύθερα, γιατί:

$$g_1 \in G, gg_1 \neq g_1, \forall g \in G - \{1\}.$$

Πρόταση:

Γ συνεκτικό γράφημα, $\overbrace{|V(\Gamma)|} = s < +\infty$, $a = |E(\Gamma)|$
Τότε $a \geq s - 1$ και η ισότητα ισχύει $\Leftrightarrow \Gamma$ δέντρο

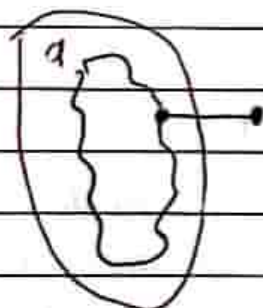


$$s = 11$$

$$a = 10$$

Απόδειξη:

Θα δείξουμε την ισότητα όταν Γ δέντρο, με επαγωγή. Έστω $s = 1$ και $a = 0 \Rightarrow$ ισχύει! Υποθέτουμε ότι Γ δέντρο με n κορυφές και $a = s - 1$. Έστω Ω δέντρο με $n+1$ κορυφές και υποθέτουμε ότι κάθε κορυφή του Ω είναι γειτονική με τουλάχιστον 2 κορυφές.



Σε διαφορετική περίπτωση, είναι από:

$$a' = n - 1$$

$$a = a' + 1 = n - 1 + 1 = n = (n+1) - 1$$

Έστω $v_1 \in V(\Omega)$. Είναι $v_1 \sim v_2 \sim v_3$ ($v_3 \neq v_1$, αλλιώς θα είχαμε κλειστό μονοπάτι). Αν την επαγωγή, θα υπάρχει μονοπάτι μήκους n που περιέχει όλες τις κορυφές μία φορά. Τότε το v_{n+1} θα εμφανιζόταν στο μονοπάτι και θα ήταν γειτονική σε μία κορυφή που θα ήταν ήδη στο μονοπάτι και θα είχαμε κλειστό μονοπάτι. Άρα θα υπάρχει τουλάχιστον 1 κορυφή η οποία θα είχε μόνο 1 γείτονα (τερματική κορυφή). Αφαιρώντας αυτή την κορυφή και την ακμή που το συνδέει με το Ω , θα είχαμε δέντρο με n κορυφές και $a' = n - 1$ (από επαγωγή).

Έστω τώρα ότι Γ οποιοδήποτε μη κενό γραφήμα. Τότε $T \subseteq \Gamma$ μέγιστο δέντρο που περιέχει όλες τις κορυφές του Γ . Άρα είναι $s(\Gamma) = s(T)$ και $a(T) = s(T) - 1 = s(\Gamma) - 1$, αλλά $a(\Gamma) \geq a(T)$. Τώρα, αν ισχύει ότι $a = s - 1$ και T μέγιστο υποδέντρο του Γ ,

τότε $s-1 = a(\Gamma) \geq a(T) = s-1 \Rightarrow a(\Gamma) = a(T) \Rightarrow \Gamma = T$. ■

Γ συνεκτικό γράφημα

$\Lambda = \bigsqcup_{i \in I} \Lambda_i$, Λ_i υποδέντρο

Ορίζουμε μία "συστάση" του Γ : Γ/Λ γράφημα $V(\Gamma/\Lambda) = V(\Gamma)/\sim$, όπου $\forall x, x' \in \Lambda_i : x \sim x'$. Επίσης $E(\Gamma/\Lambda) = E(\Gamma) - E(\Lambda)$. Δηλαδή, 2 κορυφές είναι γειτονικές στο Γ/Λ αν έχουν αντιπροσώπους που είναι γειτονικοί στο Γ , αλλά όχι στο Λ .

Πρόταση:

Γ είναι δέντρο $\Leftrightarrow \Gamma/\Lambda$ είναι δέντρο

(Αυτή η πρόταση μας βοηθάει να δούμε τη "δομή" της συστάσης.)

Απόδειξη:

Έστω ότι Γ όχι δέντρο. Τότε $a(\Gamma) > s(\Gamma) - 1$. Αλλά έχουμε ότι $a(\Gamma) = a(\Gamma/\Lambda) + a(\Lambda)$ και $s(\Gamma) = s(\Gamma/\Lambda) + \sum_{i \in I} (s(\Lambda_i) - 1)$ και $\forall i : a(\Lambda_i) = s(\Lambda_i) - 1$ (γιατί Λ_i δέντρα). Άρα παίρνουμε:
 $a(\Gamma/\Lambda) + \sum_{i \in I} a(\Lambda_i) = a(\Gamma) - a(\Lambda) + \sum_{i \in I} a(\Lambda_i) > s(\Gamma) - 1 =$
 $= s(\Gamma/\Lambda) + \sum_{i \in I} (s(\Lambda_i) - 1) - 1 \Rightarrow a(\Gamma/\Lambda) > s(\Gamma/\Lambda) - 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \Gamma/\Lambda$ όχι δέντρο. Το αντίστροφο αποδεικνύεται όμοια. ■