Οι Εικασίες Kakeya

Γιώργος Τσιάπας

Ορισμός :

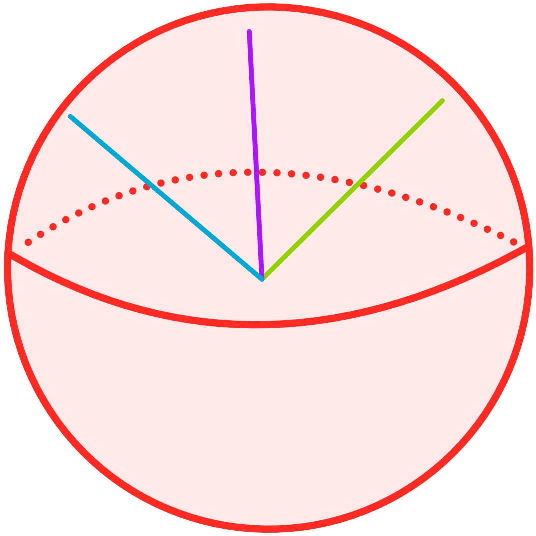
Σύνολο Kakeya στον $\mathbb{R}^n$ είναι κάθε συμπαγές $K \subseteq \mathbb{R}^n$ που περιέχει κάποιο ευθ. τμήμα μήκους 1 σε κάθε διεύθυνση

Ορισμός :

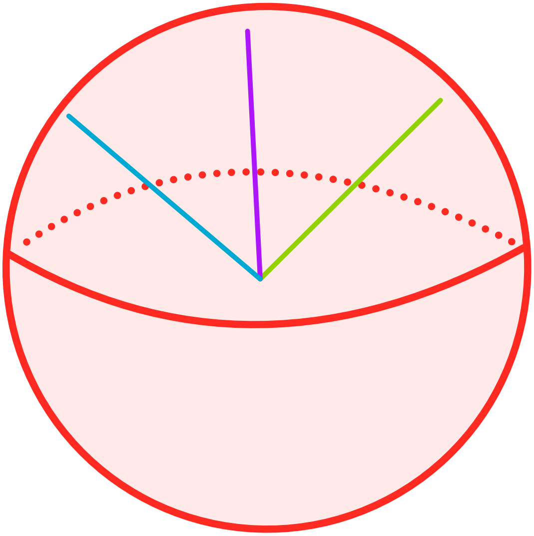
Σύνολο Kakeya στον $\mathbb{R}^n$ είναι κάθε συμπαγές $K \subseteq \mathbb{R}^n$ που περιέχει κάποιο ευθ. τμήμα μήκους 1 σε κάθε διεύθυνση

$$\forall e \in S^{n-1}, \quad \exists x \in \mathbb{R}^n :$$

$$x + te \in K \quad \forall t \in [0,1]$$

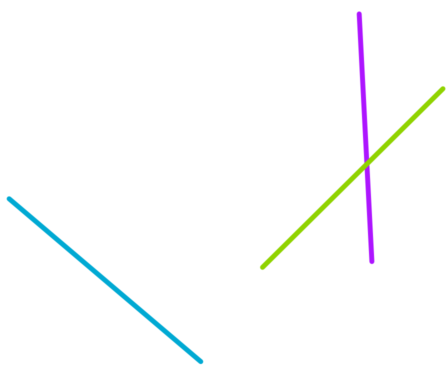


S^{n-1}



S^{n-1}

K



Εικασία Kakeya

Κάθε σύνολο Kakeya στον $\mathbb{R}^n$ έχει διάσταση Hausdorff n

Εικασία Kakeya

Κάθε σύνολο Kakeya στον $\mathbb{R}^n$ έχει διάσταση Hausdorff n

- $n=2$ ✓

  → Θα το δούμε

Εικασία Kakeya

Κάθε σύνολο Kakeya στον $\mathbb{R}^n$ έχει διάσταση Hausdorff n

- $n=2$ ✓
  ↪ Θα το δούμε

- $n \geq 3$, ακόμη δύσκολο...
  ↪ Υπάρχει το κάτω φράγμα
  $$\frac{n+1}{2}$$
  (και άλλα)

Το μέτρο Hausdorff

Το μέτρο Hausdorff

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $s \geq 0$

Το μέτρο Hausdorff

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $s \geq 0$

Για κάθε $\delta > 0$ ορίζουμε

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} C_i)^s : \begin{array}{l} A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \\ \operatorname{diam} C_i \leq \delta \end{array} \right\}$$

Το μέτρο Hausdorff

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $s \geq 0$

Για κάθε $\delta > 0$ ορίζουμε

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} C_i)^s : \begin{array}{l} A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \\ \operatorname{diam} C_i \leq \delta \end{array} \right\}$$

Και

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}_\delta^s(A)$$

Το s-διάστατο μέτρο Hausdorff

του $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\quad \mathcal{H}^s(A)$

Το s-διάστατο μέτρο Hausdorff

του $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathcal{H}^s(A)$

$(\mathcal{H}^s)_{s \geq 0}$ μονοπαραμετρική

οικογένεια «μέτρων» στον $\mathbb{R}^n$

Το s-διάστατο μέτρο Hausdorff

του $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathcal{H}^s(A)$

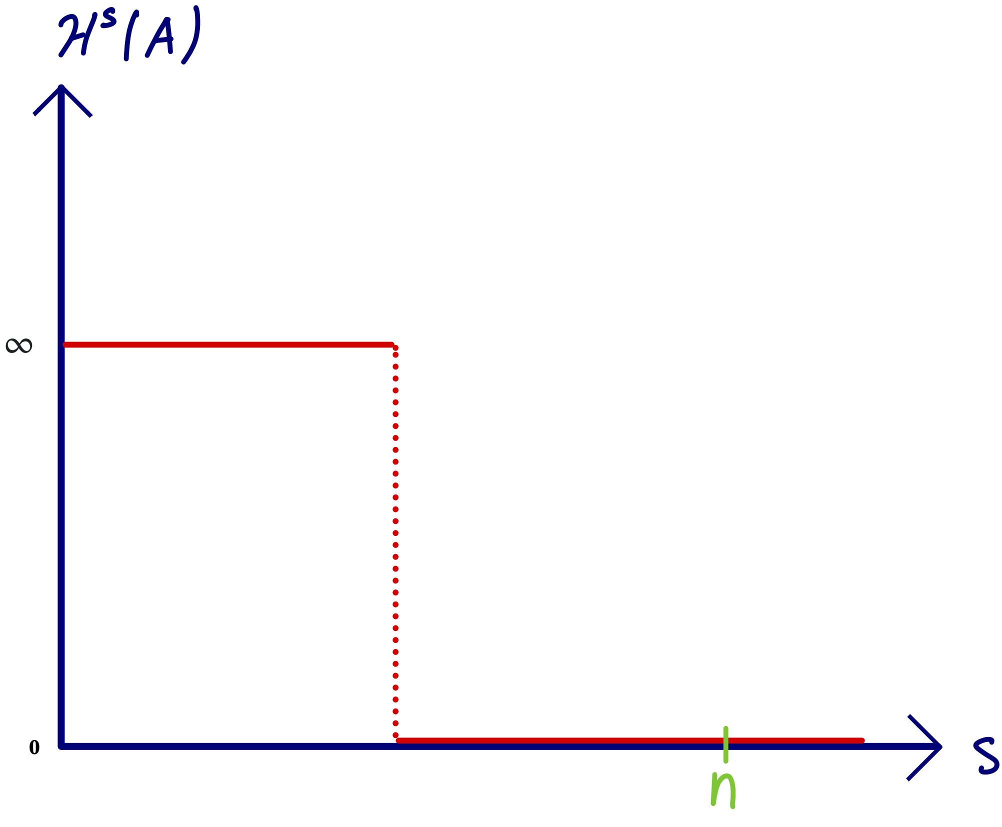
$(\mathcal{H}^s)_{s \geq 0}$ μονοπαραμετρική

οικογένεια «μέτρων» στον $\mathbb{R}^n$

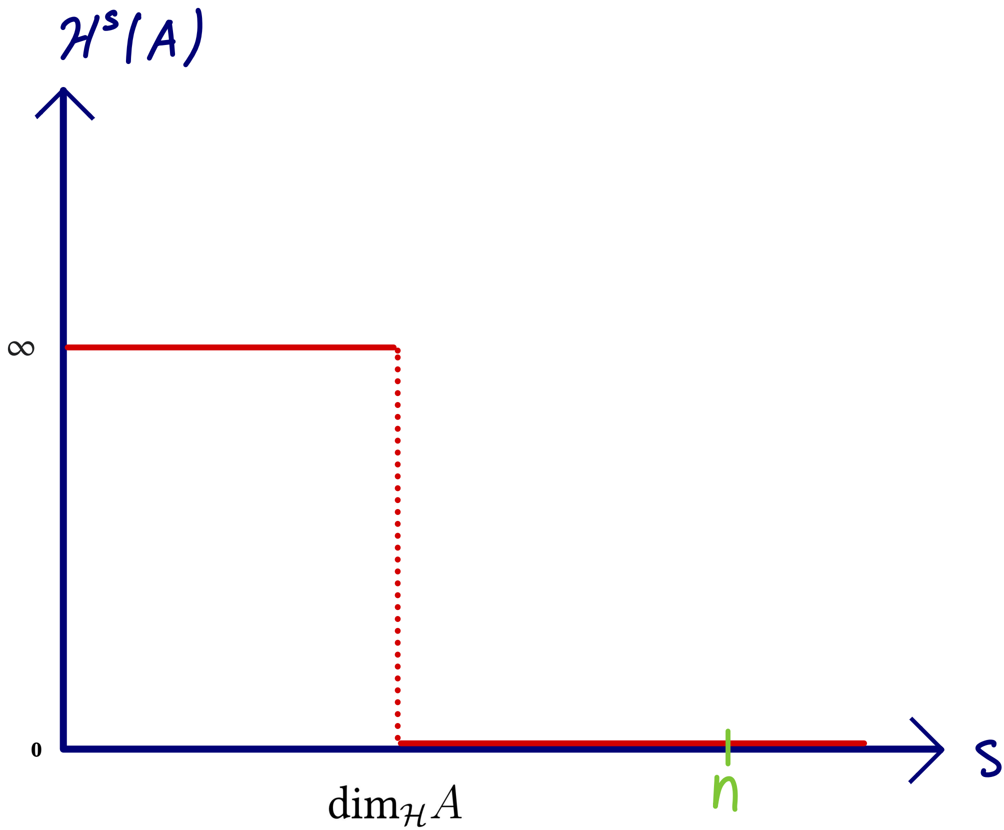
Με κλασικές τεχνικές

$\mathcal{H}^s$ μέτρο στον $\mathbb{R}^n$, $\forall s > 0$

και μάλιστα Borel κανονικό



$\mathcal{H}^s(A)$
∞
0
n
s


$\mathcal{H}^s(A)$
∞
0
$\dim_{\mathcal{H}} A$
n
s

Ορισμός:

Η διάσταση Hausdorff ενός $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ορίζεται ως

$$\dim_{\mathcal{H}} A = \inf \{ s \geq 0 : \mathcal{H}^s(A) = 0 \}$$

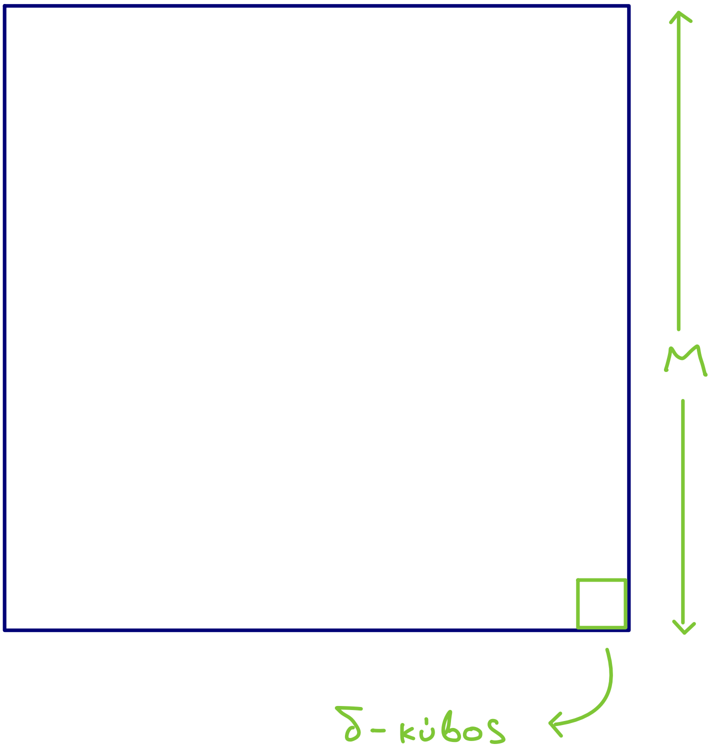
Ορισμός:

Η διάσταση Hausdorff ενός $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ορίζεται ως

$$\dim_{\mathcal{H}} A = \inf\{ s \geq 0 : \mathcal{H}^s(A) = 0 \}$$
$$= \sup\{ s \geq 0 : \mathcal{H}^s(A) = \infty \}$$

Η Διάσταση Minkowski

κύβος Q, πλευράς M



Χρειαζόμαστε $N_\delta(Q) = \left(\frac{M}{\delta}\right)^n$ δ-κύβους

για να καλύψουμε τον Q.

$$\Longrightarrow \quad n = \frac{\log N_\delta(Q)}{\log M/\delta}$$

- $A \subseteq \mathbb{R}^n$

- $N_\delta(A) :=$ ο ελάχιστος αριθμός δ-κύβων που απαιτούνται για να καλύψουν το A.

Θέλουμε :

- $A \subseteq \mathbb{R}^n$

- $N_\delta(A) :=$ ο ελάχιστος αριθμός δ-κύβων που απαιτούνται για να καλύψουν το A.

Θέλουμε :

Διάσταση του A := Ο εκθέτης s που

$$N_\delta(A) \sim \delta^{-s}$$

Για πολύ μικρά δ

$$0 < \delta \ll 1$$

Ορισμός: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ φραγμένο, $\delta > 0$,

$N_\delta(A) :=$ ο ελάχιστος αριθμός δ-κύβων που καλύπτουν το A.

Ορισμός: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ φραγμένο, $\delta > 0$,

$N_\delta(A) :=$ ο ελάχιστος αριθμός δ-κύβων που καλύπτουν το A.

Η διάσταση Minkowski του A:

$$\dim_M A := \limsup_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(A)}{-\log \delta}$$

Ορισμός: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ φραγμένο, $\delta > 0$,

$N_\delta(A) :=$ ο ελάχιστος αριθμός δ-κύβων που καλύπτουν το A.

Η διάσταση Minkowski του A:

$$\dim_M A := \limsup_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(A)}{-\log \delta}$$

Καταλήγουμε σε ισοδύναμο ορισμό επιλέγοντας το $N_\delta(A)$ ως τον ελάχιστο αριθμό δ-κύβων που καλύπτουν το A^δ

Βασικές ιδιότητες

Βασικές ιδιότητες

- $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ κύβος $\Longrightarrow \dim_M Q = n$

Βασικές ιδιότητες

- $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ κύβος $\Longrightarrow$ $\dim_M Q = n$

- $A \subseteq B \Longrightarrow \dim_M A \leq \dim_M B$

Βασικές ιδιότητες

- $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ κύβος $\Longrightarrow$ $\dim_M Q = n$

- $A \subseteq B \Longrightarrow \dim_M A \leq \dim_M B$

- $\dim_M A \leq n$

Βασικές ιδιότητες

- $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ κύβος $\Longrightarrow \dim_M Q = n$

- $A \subseteq B \Longrightarrow \dim_M A \leq \dim_M B$

- $\dim_M A \leq n$

- $\dim_{\mathcal{H}} A \leq \dim_M A$

Σύνολο Kakeya μέτρου μηδέν

Βήμα 1: Πρώτα στον $\mathbb{R}^2$.

Σύνολο Kakeya μέτρου μηδέν

Βήμα 1: Πρώτα στον $\mathbb{R}^2$.

Έστω C σύνολο τύπου Cantor.

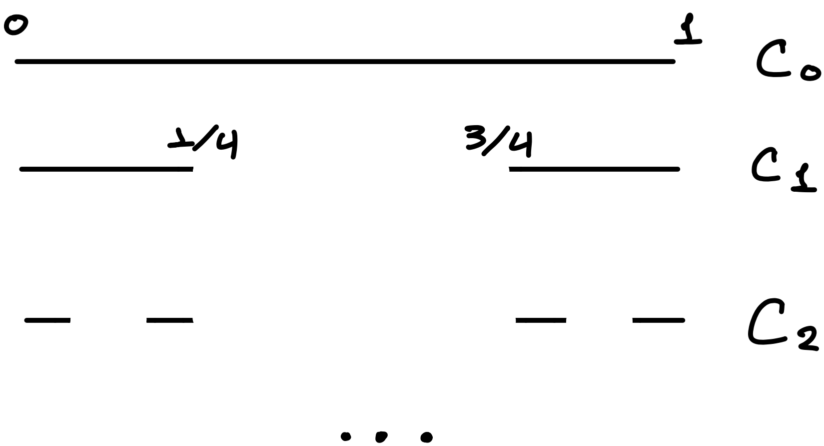
$$x \in C \iff x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{4^k}, \quad a_k \in \{0, 3\}$$

Σύνολο Kakeya μέτρου μηδέν

Βήμα 1: Πρώτα στον $\mathbb{R}^2$.

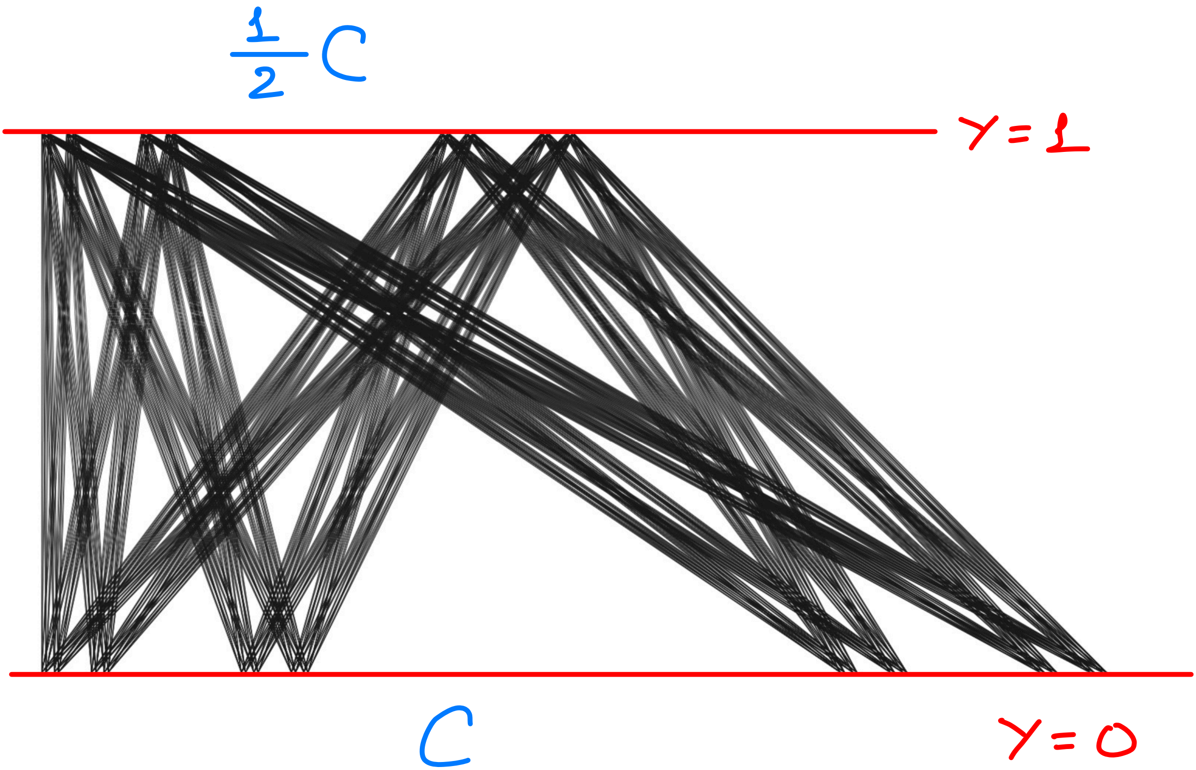
Έστω C σύνολο τύπου Cantor.

$$x \in C \iff x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{4^k}, \quad a_k \in \{0, 3\}$$



Το σύνολο F

Το σύνολο F



Για το F ισχύει ότι:

Είναι συμπαγές

Για το F ισχύει ότι :

είναι συμπαγές

$$m_2(F) = 0$$

Για το F ισχύει ότι:

Είναι συμπαγές

$$m_2(F)=0$$

Για κάθε ευθ. τμήμα μήκους 1 με κλίση εκτός του $(-1,2)$ το F περιέχει μεταφορά του

Άρα:

Μια πεπερασμένη ένωση από στροφές του F είναι το ζητούμενο σύνολο Kakeya του $\mathbb{R}^2$.

Βήμα 2 : Στον $\mathbb{R}^n$.

Βήμα 2 : Στον $\mathbb{R}^n$.

Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^2$ σύνολο Kakeya.

Βήμα 2: Στον $\mathbb{R}^n$.

Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^2$ σύνολο Kakeya.

$\Longrightarrow$ Το $\tilde{K} := K \times \overline{B(x, 1/2)}$

είναι σύνολο

Kakeya στον $\mathbb{R}^n$.

$B(x, 1/2)$ μπάλα του $\mathbb{R}^{n-2}$

$\blacksquare$

Οι Εικασίες Kakeya

Οι Εικασίες Kakeya

Κλασική εκδοχή

Weak εκδοχή

Μεγιστική εικασία Kakeya

Κλασική Εικασία Kakeya:

Κάθε σύνολο Kakeya στον $\mathbb{R}^n$ έχει διάσταση Hausdorff n.

Όπως είπαμε:

$$\dim_{\mathcal{H}} A \leq \dim_{M} A$$

Όπως είπαμε:

$$\dim_{\mathcal{H}} A \leq \dim_M A$$

$$\Downarrow$$

Weak Kakeya:

Κάθε σύνολο Kakeya στον $\mathbb{R}^n$ έχει διάσταση Minkowski n.

Βασικό αποτέλεσμα για τη διάσταση Minkowski :

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ φραγμένο κ' $0 \leq a \leq n$.

$$m(A^\delta) \gtrsim \delta^{n-a} \quad \forall\, \delta > 0$$

Βασικό αποτέλεσμα για τη διάσταση Minkowski:

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ φραγμένο κ' $0 \leq \alpha \leq n$.

$$m(A^\delta) \gtrsim \delta^{n-\alpha} \quad \forall\, \delta > 0$$

$$\Longrightarrow \dim_M A \geq \alpha.$$

Σύντομη Απόδειξη:

Fix $\delta > 0$.

Σύντομη Απόδειξη:

Fix $\delta > 0$.

$$A^{\delta} \subseteq \underbrace{Q_1 \cup \ldots \cup Q_{N_\delta(A)}}_{\delta\text{-κύβοι}}$$

$$\Rightarrow m_n(A^{\delta}) \leq N_\delta(A)\,\delta^n$$

Σύντομη Απόδειξη:

Fix $\delta > 0$.

$$A^\delta \subseteq \underbrace{Q_1 \cup \dots \cup Q_{N_\delta(A)}}_{\delta\text{-κύβοι}}$$

$$\Rightarrow m_n(A^\delta) \leq N_\delta(A)\,\delta^n$$

$$\Rightarrow N_\delta(A^\delta) \geq \frac{m_n(A^\delta)}{\delta^n} \gtrsim \delta^{-a}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\log N_\delta(A^\delta)}{-\log \delta} \geq c(\delta) + \alpha$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\log N_\delta(A^\delta)}{-\log \delta} \geq c(\delta) + \alpha$$

$$c(\delta) \xrightarrow{\delta \to 0} 0$$

Παίρνουμε όρια καθώς $\delta \to 0$ και είμαστε οκ.

$\blacksquare$

ΆΡΑ :

Για $K \subseteq \mathbb{R}^n$ Kakeya,

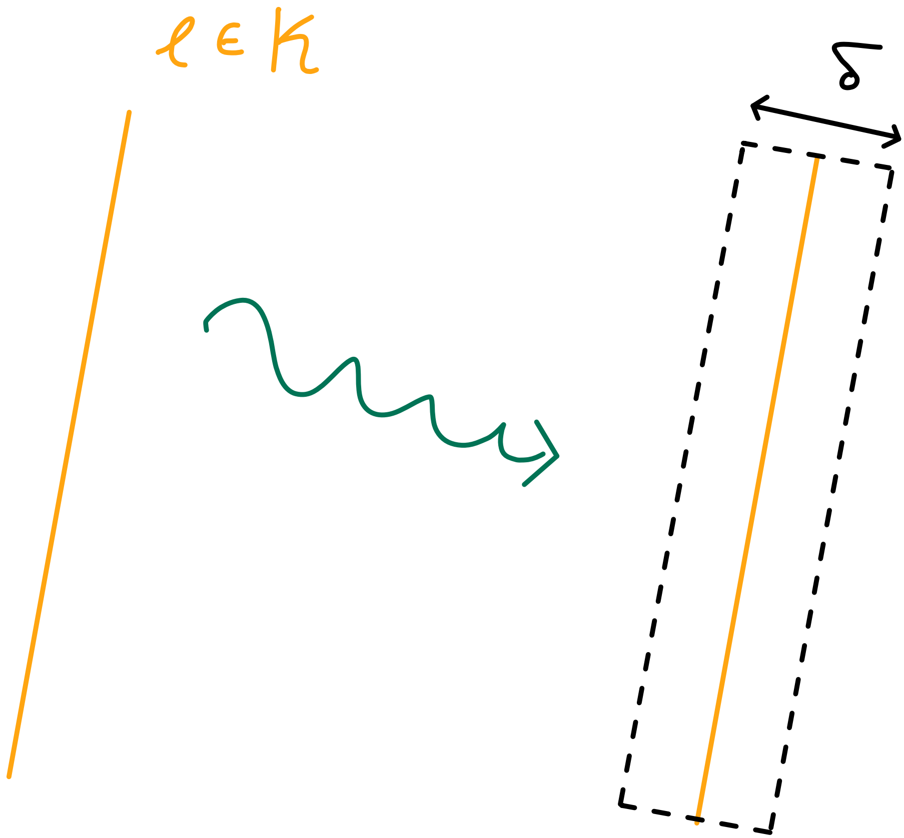
αν $m_n(K^\delta) \gtrsim 1 \quad \forall\, \delta > 0$

$\Rightarrow$ Η Weak Kakeya είναι αληθής

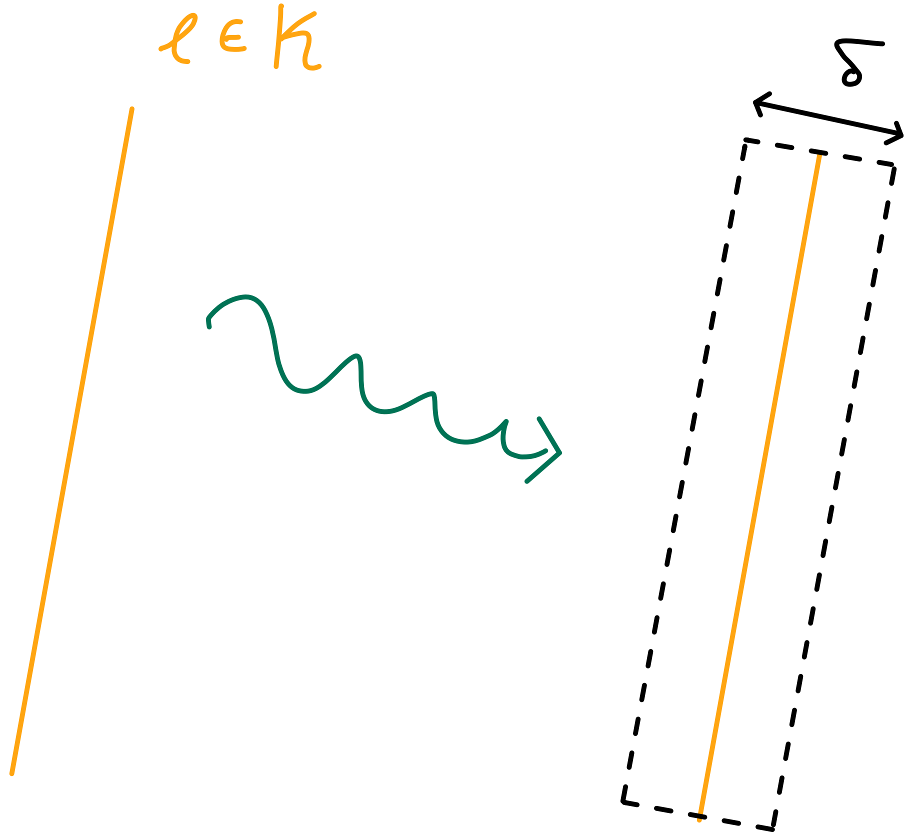
Μεγιστική Εικασία Kakeya

Η διακριτοποίηση του προβλήματος

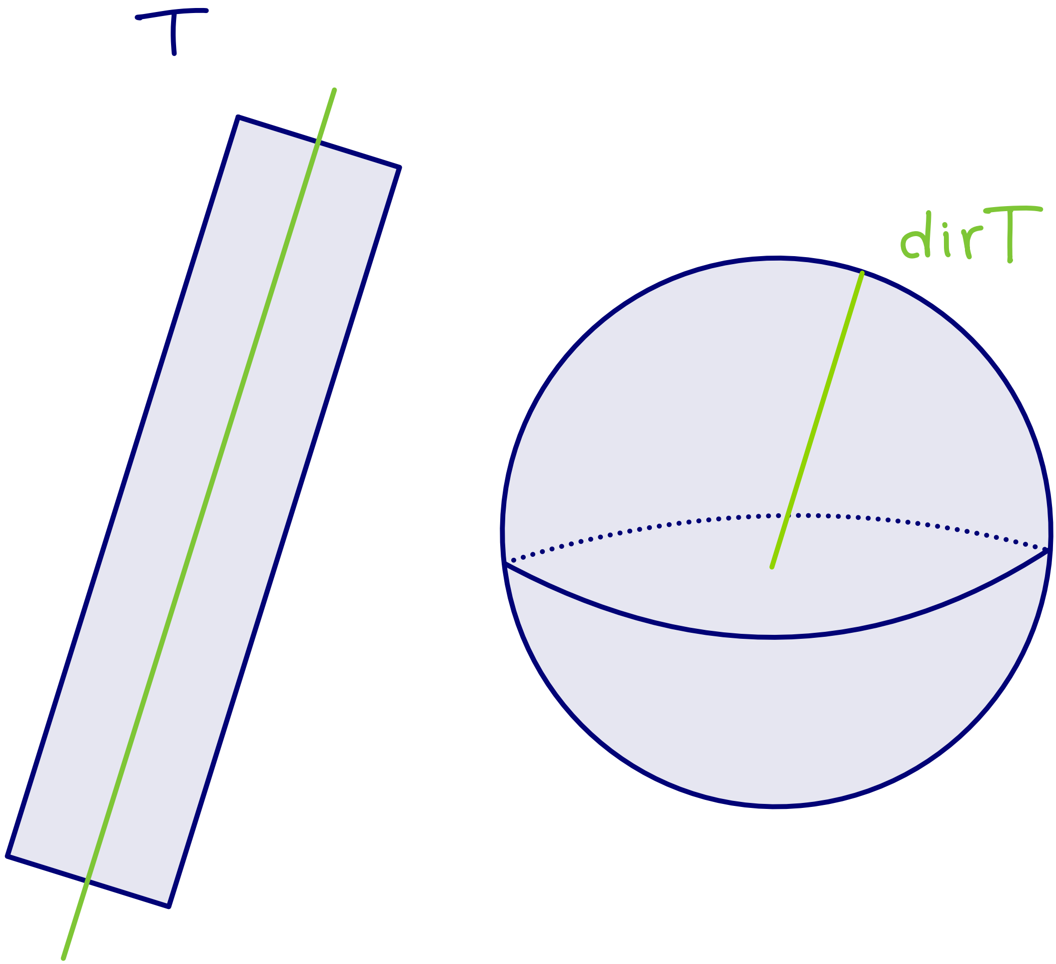
$\ell \in K$



$\ell \in K$
δ



Κύλινδρος στον $\mathbb{R}^n$ με ακτίνα $\delta/2 =:$ δ-κύλινδρος


T
dirT

Μας ενδιαφέρουν οι δ-κύλινδροι του $\mathbb{R}^n$ που είναι δ-διαχωρισμένοι

Μας ενδιαφέρουν οι δ-κύλινδροι του $\mathbb{R}^n$ που είναι δ-διαχωρισμένοι

Ορισμός:

T_1, T_2 δ-διαχωρισμένοι

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \angle(\operatorname{dir} T_1, \operatorname{dir} T_2) \geq \delta \\ \angle(\operatorname{dir} T_1, -\operatorname{dir} T_2) \geq \delta \end{array} \right\}$$

Έστω $\mathcal{Y}$ οικογένεια δ-διαχωρισμένων δ-κυλίνδρων του $\mathbb{R}^n$

Έστω $\mathcal{Y}$ οικογένεια δ-διαχωρισμένων δ-κυλίνδρων του $\mathbb{R}^n$

Για το $\#\mathcal{Y}$:

Έστω $\mathcal{Y}$ οικογένεια

δ-διαχωρισμένων

δ-κυλίνδρων του $\mathbb{R}^n$

Για το $\#\mathcal{Y}$:

$$\boxed{\#\mathcal{Y} \lesssim \delta^{1-n}}$$

Μεγιστική Εικασία Kakeya :

Για κάθε $\delta>0$ και για κάθε οικογένεια $\mathcal{T}$ δ-διαχωρισμένων δ-tubes του $\mathbb{R}^n$, ισχύει ότι

$$\Big\| \sum_{T\in\mathcal{T}} \chi_T \Big\|_{\frac{n}{n-1}} \lessapprox \Big(\sum_{T\in\mathcal{T}} m(T) \Big)^{\frac{n-1}{n}}$$

Θεώρημα:

Μεγιστική Kakeya $\Longrightarrow$ Weak Kakeya

Θεώρημα:

Μεγιστική Kakeya $\Longrightarrow$ Weak Kakeya

Απόδειξη:

Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^n$ Kakeya και $\delta > 0$.

Αρκεί ν.δ.ο.

$$m(K^\delta) \gtrapprox 1$$

Έστω $\mathcal{T}$ η μεγιστική οικογένεια δ-διαχωρισμένων δ-tubes που περιέχονται στο K^δ.

Είναι $\#\mathcal{T} \sim \delta^{1-n}$

Υπολογίζουμε :

$$\int \sum_{\tau \in Y} x_\tau =$$

Υπολογίζουμε :

$$\int \sum_{T \in \Upsilon} x_T =$$

$$= \sum_{T \in \Upsilon} m(T)$$

$$= \# \Upsilon \, m(T)$$

Υπολογίζουμε :

$$\int \sum_{T \in \Upsilon} x_T =$$

$$= \sum_{T \in \Upsilon} m(T)$$

$$= \# \Upsilon \, m(T)$$

$$\sim \# \Upsilon \, \delta^{n-1} = 1$$

Υπολογίζουμε:

$$\int \sum_{T \in \Upsilon} x_T =$$

$$= \sum_{T \in \Upsilon} m(T)$$

$$= \# \Upsilon \, m(T)$$

$$\sim \boxed{\# \Upsilon} \, \delta^{n-1} = 1$$

$\sim \delta^{1-n}$

Απ' την άλλη :

$$\int \sum_{\tau \in \gamma} x_\tau =$$

$$= \int \Big(\sum_{\tau \in \gamma} x_\tau \Big) \chi_{K^\delta}$$

Απ' την άλλη:

$$\int \sum_{T \in \mathcal{Y}} \chi_T =$$

$$= \int \Big(\sum_{T \in \mathcal{Y}} \chi_T \Big) \chi_{K^\delta}$$

$$\leq \Big\| \sum_{T \in \mathcal{Y}} \chi_T \Big\|_{\frac{n}{n-1}} m(K^\delta)^{1/n}$$

Απ' την άλλη:

$$\int \sum_{T\in\gamma} \chi_T =$$

$$= \int \Big(\sum_{T\in\gamma} \chi_T \Big) \chi_{K^\delta}$$

$$\leq \Big\| \sum_{T\in\gamma} \chi_T \Big\|_{\frac{n}{n-1}} m(K^\delta)^{1/n}$$

$$\lessapprox \Big(\sum_{T\in\gamma} m(T) \Big)^{\frac{n-1}{n}} m(K^\delta)^{1/n}$$

Απ' την άλλη :

$$
\begin{aligned}
\int \sum_{T \in \gamma} x_T &= \\
&= \int \Big(\sum_{T \in \gamma} x_T \Big) x_{K^\delta} \\
&\leq \Big\| \sum_{T \in \gamma} x_T \Big\|_{\frac{n}{n-1}} m(K^\delta)^{1/n} \\
&\lesssim \underbrace{\boxed{\Big(\sum_{T \in \gamma} m(T) \Big)^{\frac{n-1}{n}}}}_{\sim 1} m(K^\delta)^{1/n}
\end{aligned}
$$

Άρα,

$$m(K^\delta)^{1/n} \gtrsim 1$$

$$\Longrightarrow m(K^\delta) \gtrsim 1$$

που είναι το ζητούμενο. ∎

Τι μας λέει η

Μεγιστική Εικασία Kakeya;

Τι μας λέει η Μεγιστική Εικασία Kakeya;

Ας υποθέσουμε ότι είναι αληθής.

Δηλαδή, για κάθε $\delta > 0$ και κάθε οικογένεια δ-διαχ. δ-κυλίνδρων $\mathcal{T}$ στον $\mathbb{R}^n$:

$$\Big\| \sum_{T \in \mathcal{T}} \chi_T \Big\|_{\frac{n}{n-1}} \lessapprox \Big(\sum_{T \in \mathcal{T}} m(T) \Big)^{\frac{n-1}{n}}$$

Τότε,

$$\sum_{T\in\mathcal{T}} m(T) =$$

$$= \int \sum_{T\in\mathcal{T}} \chi_T$$

$$= \int \Big(\sum_{T\in\mathcal{T}} \chi_T\Big) \chi_{\bigcup_{T\in\mathcal{T}} T}$$

$$\leq \Big\|\sum_{T\in\mathcal{T}} \chi_T\Big\|_{\frac{n}{n-1}} m\Big(\bigcup_{T\in\mathcal{T}} T\Big)^{1/n}$$

$$\lesssim \left(\sum_{T \in \mathcal{T}} m(T) \right)^{\frac{n-1}{n}} m\left(\bigcup_{T \in \mathcal{T}} T \right)^{1/n}$$

$$\lesssim \left(\sum_{T \in \mathbb{T}} m(T) \right)^{\frac{n-1}{n}} m\left(\bigcup_{T \in \mathbb{T}} T \right)^{1/n}$$

$$\Longrightarrow m\left(\bigcup_{T \in \mathbb{T}} T \right) \gtrsim \sum_{T \in \mathbb{T}} m(T)$$

Από την άλλη,

προφανώς έχουμε ότι

$$m\Big(\bigcup_{T\in\mathcal{T}} T\Big) \le \sum_{T\in\mathcal{T}} m(T)$$

ΆΡΑ :

Με τη Μεγιστική Εικασία Kakeya

οι ποσότητες

$$m\left(\bigcup_{T\in\mathcal{T}} T\right), \quad \sum_{T\in\mathcal{T}} m(T)$$

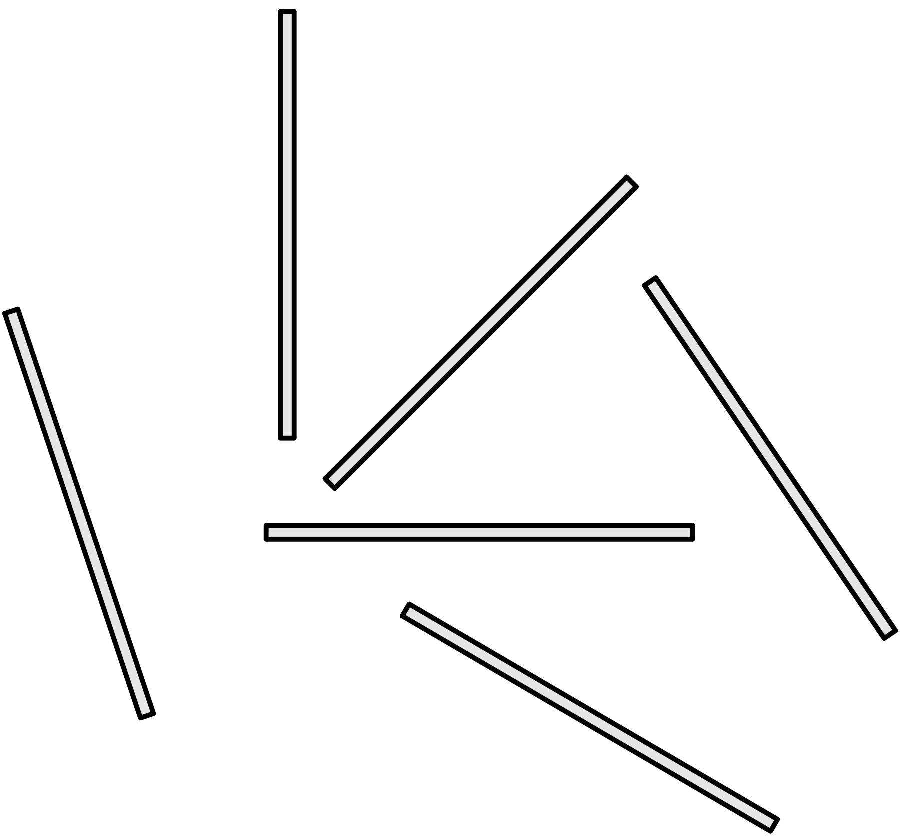
είναι $\approx$ συγκρίσιμες.

Ή αλλιώς :

Οι δ-διαχωρισμένοι δ-κύλινδροι της οικογένειας $\mathcal{T}$ συμπεριφέρονται «σχεδόν» $\approx$ σαν ξένοι.

Περίπτωση 1 :

Οι δ-διαχωρισμένοι δ-κύλινδροι της Υ είναι ανά δύο ξένοι



$T_1, \ldots, T_N \in \mathcal{T}$ s.d.

$$\Longrightarrow \sum_{T \in \mathcal{T}} x_T \in \{0, 1\}$$

$T_1, \ldots, T_N \in \mathcal{T}$ $\quad$ f.a.d.

$$\Longrightarrow \sum_{T \in \mathcal{T}} \chi_T \in \{0, 1\}$$

$$\Longrightarrow \left(\sum_{T \in \mathcal{T}} \chi_T(x) \right)^{n/n-1} = \sum_{T \in \mathcal{T}} \chi_T(x)$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

ΆΡΑ :

$$\int \Big(\sum_{T \in \mathcal{T}} x_T \Big)^{n/n-1} =$$

$$= \int \sum_{T \in \mathcal{T}} x_T$$

$$= \sum_{T \in \mathcal{T}} m(T)$$

'APA :

$$\int \Big(\sum_{T\in\mathcal{T}} x_T\Big)^{n/n-1} =$$

$$= \int \sum_{T\in\mathcal{T}} x_T$$

$$= \sum_{T\in\mathcal{T}} m(T)$$

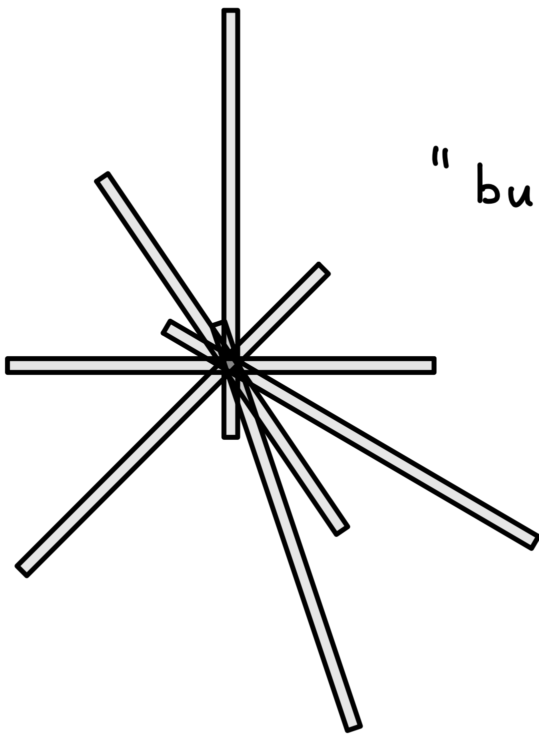
$$\Longrightarrow \Big\|\sum_{T\in\mathcal{T}} x_T\Big\|_{\frac{n}{n-1}} = \Big(\sum_{T\in\mathcal{T}} m(T)\Big)^{\frac{n-1}{n}}$$

$\blacksquare$

Περίπτωση 2:

Οι δ-διαχωρισμένοι δ-κύλινδροι της $\mathcal{T}$ διέρχονται από κοινό σημείο

ΧΒΓ το O



"bush structure"

η απόσταση του x από το κοινό σημείο

Λήμμα: Για $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = r$

$$\Rightarrow \sum_{T \in \mathcal{T}} \chi_T(x) \lesssim \frac{1}{r^{n-1}}$$

Υπολογίζουμε

$$\left\| \sum_{\tau \in \gamma} x_\tau \right\|_{\frac{n}{n-1}}^{\frac{n}{n-1}} =$$

$$= \int \Big(\sum_{\tau \in \gamma} x_\tau \Big)^{n/n-1}$$

Υπολογίζουμε

$$\left\| \sum_{T \in \gamma} x_T \right\|_{\frac{n}{n-1}}^{\frac{n}{n-1}} =$$

$$= \int \Big(\sum_{T \in \gamma} x_T \Big)^{n/n-1}$$

$$= \int \Big(\sum_{T \in \gamma} x_T \Big) \Big(\sum_{T \in \gamma} x_T \Big)^{1/n-1}$$

$$= \sum_{T \in \gamma} \int_T \Big(\sum_{T \in \gamma} x_T \Big)^{1/n-1}$$

Σταθεροποιούμε $\tilde{T} \in \mathcal{T}$

Διαμερίζουμε τον $\tilde{T}$ σε $1/\delta$

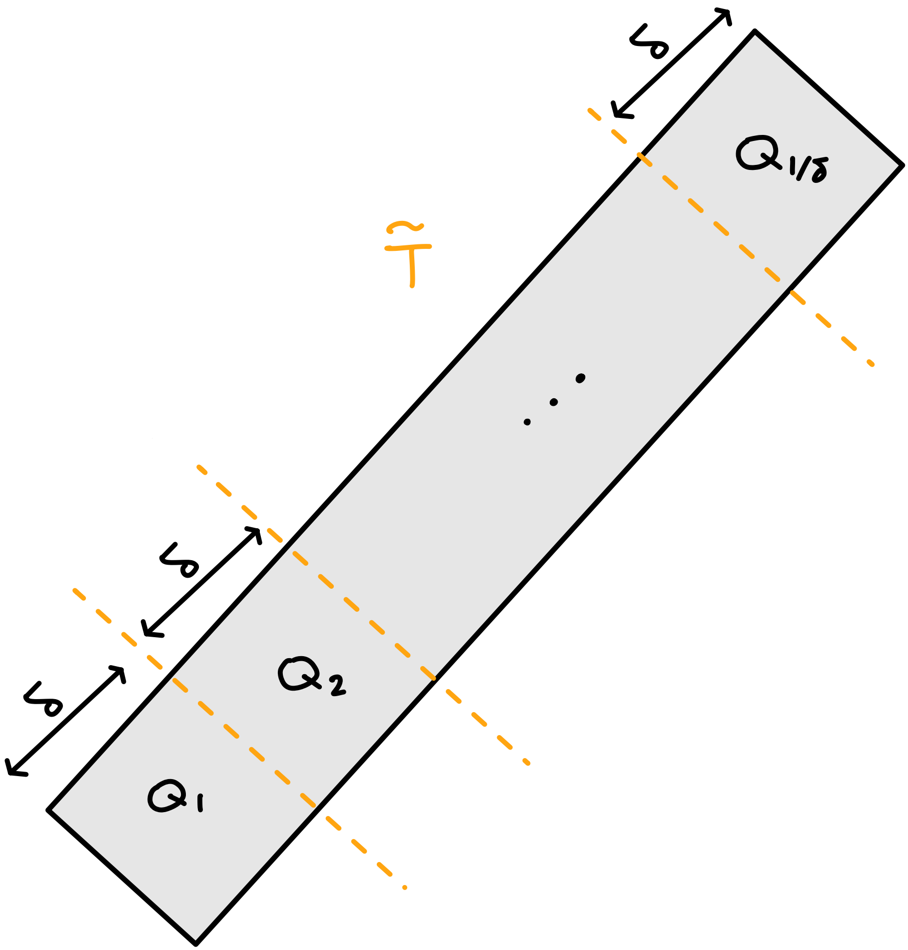
το πλήθος ξένους δ-κύβους

$$Q_1, \ldots, Q_{1/\delta}$$

Σταθεροποιούμε $\tilde{T} \in \mathcal{T}$

Διαμερίζουμε τον $\tilde{T}$ σε $1/\delta$ το πλήθος ξένους δ-κύβους

$$Q_1, \dots, Q_{1/\delta}$$



Τότε

$$\int_{\tilde{T}} \Big(\sum_{\tau \in \Upsilon} x_\tau \Big)^{1/n-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{1/\delta} \int_{Q_k} \Big(\sum_{\tau \in \Upsilon} x_\tau \Big)^{1/n-1}$$

Τότε

$$\int_{\tilde{T}} \Big(\sum_{T \in \mathcal{T}} \chi_T \Big)^{1/n-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{1/\delta} \int_{Q_k} \Big(\sum_{T \in \mathcal{T}} \chi_T \Big)^{1/n-1}$$

Και $x \in Q_k \Rightarrow \|x\| \sim k\delta$

$$\Rightarrow \sum_{T \in \mathcal{T}} \chi_T(x) \lesssim \frac{1}{(k\delta)^{n-1}}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\int_{\tilde{T}} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}} x_T \right)^{1/n-1} =$$

$$\sum_{k=1}^{1/\delta} \int_{Q_k} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}} x_T \right)^{1/n-1}$$

$$\lesssim \sum_{k=1}^{1/\delta} \int_{Q_k} \frac{1}{k\delta}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\int_{\tilde{T}} \Big(\sum_{T \in \mathcal{T}} \chi_T \Big)^{1/n-1} =$$

$$\sum_{k=1}^{1/\delta} \int_{Q_k} \Big(\sum_{T \in \mathcal{T}} \chi_T \Big)^{1/n-1}$$

$$\lesssim \sum_{k=1}^{1/\delta} \int_{Q_k} \frac{1}{k\delta}$$

$$= \delta^{n-1} \sum_{k=1}^{1/\delta} \frac{1}{k}$$

$$\sim \delta^{n-1} \log 1/\delta$$

Τελικά,

$$\sum_{T \in \gamma} \int_T \left(\sum_{T \in \gamma} x_T \right)^{1/n-1} \lesssim$$

Τελικά,

$$\sum_{T \in \gamma} \int_T \left(\sum_{T \in \gamma} x_T \right)^{1/n-1} \lesssim$$

$$\lesssim \sum_{T \in \gamma} \delta^{n-1} \log 1/\delta$$

$$\sim \log 1/\delta \sum_{T \in \gamma} m(T)$$

$$\Longrightarrow$$

$$\Big\|\sum_{T\in\mathcal{Y}} x_T\Big\|_{\frac{n}{n-1}} \lesssim \Big(\sum_{T\in\mathcal{Y}} m(T)\Big)^{\frac{n-1}{n}}$$

$\blacksquare$

Η περίπτωση $n=2$

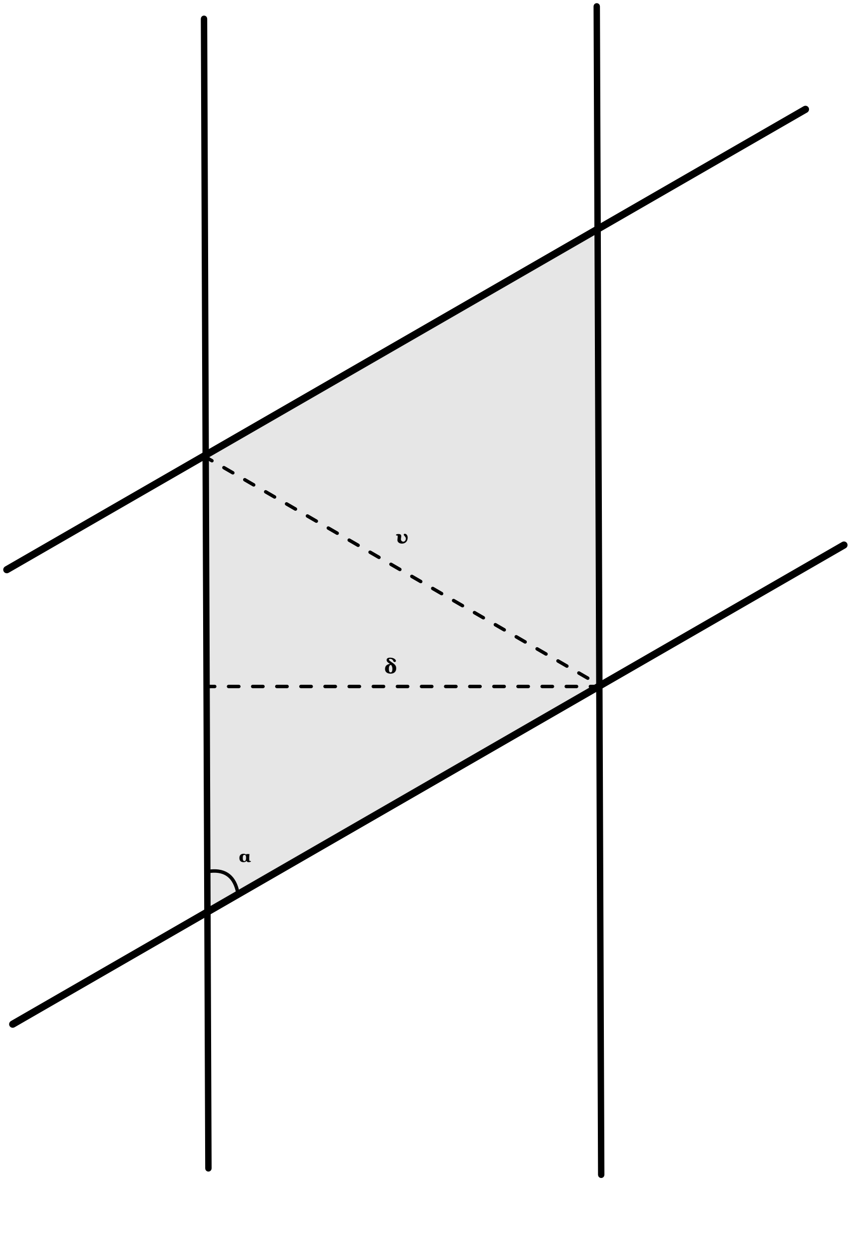
Η περίπτωση $n=2$

Λήμμα:

T_1, T_2 δ-διαχωρισμένοι

με $\angle(\operatorname{dir} T_1, \operatorname{dir} T_2) = \alpha$

$$\Longrightarrow m_2(T_1 \cap T_2) \lesssim \frac{\delta^2}{\alpha}$$


υ
δ
α

Θεώρημα:

Έστω $\delta>0$, $\mathcal{T}$ οικογένεια δ-διαχ. δ-κυλίνδρων στον $\mathbb{R}^2$. Τότε,

$$\Big\| \sum_{T\in\mathcal{T}} \chi_T \Big\|_2 \lesssim \Big(\sum_{T\in\mathcal{T}} m(T) \Big)^{1/2}$$

Θεώρημα:

Έστω $\delta > 0$, $\mathcal{T}$ οικογένεια δ-διαχ. δ-κυλίνδρων στον $\mathbb{R}^2$. Τότε,

$$\Big\| \sum_{T \in \mathcal{T}} \chi_T \Big\|_2 \lessapprox \Big(\sum_{T \in \mathcal{T}} m(T) \Big)^{1/2}$$

$$\Downarrow$$

$\dim_M K = 2$

$\forall K \subseteq \mathbb{R}^2$ Kakeya

Bourgain:

Για το κάτω φράγμα

$$\boxed{\dim_M K \geq \frac{n+1}{2}}$$

αναζητάμε "bush structure"

στο K

Το πρόβλημα σε πεπερασμένα σώματα

Θυμίζουμε ότι

Για $\mathcal{T}$ μεγιστική οικογένεια

δ-διαχ. κυλίνδρων $\subseteq K \subseteq \mathbb{R}^n$

Θυμίζουμε ότι

Για $\mathcal{T}$ μεγιστική οικογένεια δ-διαχ. κυλίνδρων $\subseteq K \subseteq \mathbb{R}^n$

$$m(K^\delta) \geq m\Big(\bigcup_{T \in \mathcal{T}} T\Big) \overset{\text{MEK}}{\gtrsim} \sum_{T \in \mathcal{T}} m(T)$$

Θυμίζουμε ότι

Για $\mathcal{T}$ μεγιστική οικογένεια δ-διαχ. κυλίνδρων $\subseteq K \subseteq \mathbb{R}^n$

$$m(K^\delta) \geq m\Big(\bigcup_{T\in\mathcal{T}} T\Big) \overset{\text{MEK}}{\gtrsim} \sum_{T\in\mathcal{T}} m(T)$$

$$\sim 1$$

Στα πεπερασμένα σώματα $\mathbb{F}_q$

Στα πεπερασμένα σώματα $\mathbb{F}_q$

Ευθεία στον δ.χ. $\mathbb{F}_q^n$

που διέρχεται από το διάνυσμα

$$b \in \mathbb{F}_q^n$$

και είναι παράλληλη στο διάνυσμα

$$a \in \mathbb{F}_q^n \setminus \{0\}$$

Στα πεπερασμένα σώματα $\mathbb{F}_q$

Ευθεία στον δ.χ. $\mathbb{F}_q^n$

που διέρχεται από το διάνυσμα

$$b \in \mathbb{F}_q^n$$

και είναι παράλληλη στο διάνυσμα

$$a \in \mathbb{F}_q^n \setminus \{0\}$$

είναι το σύνολο

$$\{ b + ta : t \in \mathbb{F}_q \}$$

Σύνολο Kakeya είναι κάθε $K \subseteq \mathbb{F}_q^n$ που περιέχει ευθεία οποιασδήποτε διεύθυνσης:

Σύνολο Kakeya είναι κάθε $K \subseteq \mathbb{F}_q^n$ που περιέχει ευθεία οποιασδήποτε διεύθυνσης:

Για κάθε $a \in \mathbb{F}_q^n \setminus \{0\}$ υπάρχει $b \in \mathbb{F}_q^n$ έτσι ώστε

$$\{b + ta : t \in \mathbb{F}_q\} \subseteq K$$

Αν $\mathcal{L}$ είναι μια οικογένεια ευθειών τ.ω. $L \in K \quad \forall L \in \mathcal{L}$

σε αναλογία με τη Μ.Ε.Κ.

θα θέλαμε

$$|K| \geq \left|\bigcup_{L \in \mathcal{L}} L\right| \gtrsim \#\mathcal{L}\,|L|$$

Αν $\mathcal{L}$ είναι μια οικογένεια ευθειών τ.ω. $L \in K \quad \forall L \in \mathcal{L}$

σε αναλογία με τη Μ.Ε.Κ.

θα θέλαμε

$$|K| \geq \left|\bigcup_{L \in \mathcal{L}} L\right| \gtrsim \underbrace{\#\mathcal{L}}_{\sim q^{n-1}} \underbrace{|L|}_{= q}$$

Αν $\mathcal{L}$ είναι μια οικογένεια ευθειών τ.ω. $L \in K \quad \forall L \in \mathcal{L}$

σε αναλογία με τη Μ.Ε.Κ.

θα θέλαμε

$$|K| \geq \Big|\bigcup_{L\in\mathcal{L}} L\Big| \gtrsim \underbrace{\#\mathcal{L}}_{\sim q^{n-1}}\,\underbrace{|L|}_{=q}$$

Στόχος :

$$|K| \gtrsim q^n ,$$

$\forall\ K \subseteq \mathbb{F}_q^n$ Kakeya

Στόχος :

$$|K| \gtrsim q^n ,$$

$$\forall K \subseteq \mathbb{F}_q^n \quad \text{Kakeya}$$

polynomial method

Dvir 2008

$\mathrm{Pol}_D(\mathbb{F}^n) \leq \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$

πολυώνυμα βαθμού $\leq D$

$Pol_D(\mathbb{F}^n) \leq \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$

πολυώνυμα βαθμού $\leq D$

Πρόταση 1:

Έστω $S \subseteq \mathbb{F}^n$ πεπ/νο

Αν $\dim Pol_D(\mathbb{F}^n) > |S|$

$\Longrightarrow \exists\, P \in Pol_D(\mathbb{F}^n) \setminus \{0\}$

τ.ω. $P(s) = 0 \quad \forall s \in S$.

Απόδειξη :

Απόδειξη :

Γράφουμε $S = \{ q_1, \ldots, q_{|S|} \}$

και έστω

$$\phi : Pol_D(\mathbb{F}^n) \longrightarrow \mathbb{F}^{|S|},$$

$$\phi(P) = \left(P(q_1), \ldots, P(q_{|S|}) \right)$$

Απόδειξη :

Γράφουμε $S = \{q_1, \dots, q_{|S|}\}$

και έστω

$$\phi : Pol_D(\mathbb{F}^n) \longrightarrow \mathbb{F}^{|S|},$$

$$\phi(P) = \big(P(q_1), \dots, P(q_{|S|})\big)$$

$$\ker\phi$$

$$\|$$

$$\{P \in Pol_D(\mathbb{F}^n) : P(s) = 0 \ \forall s \in S\}$$

Πρώτο θεώρημα ισομορφισμών :

$$\dim\left(\mathrm{Pol}_D(\mathbb{F}^n)/\ker\phi\right) \leqslant |S|$$

Πρώτο θεώρημα ισομορφισμών :

$$\dim\left(Pol_D(\mathbb{F}^n)/\ker\phi \right) \leq |S|$$

$$\Downarrow$$

$$\dim Pol_D(\mathbb{F}^n) > |S|$$

$$\ker\phi \neq \{0\}$$

$\blacksquare$

Ποια η διάσταση του $\mathrm{Pol}_D(\mathbb{F}^n)$;

Ποια η διάσταση του $Pol_D(\mathbb{F}^n)$;

Λήμμα:

$$\boxed{\dim(Pol_D(\mathbb{F}^n)) = \binom{D+n}{n} \sim D^n}$$

Θα μας χρειαστεί το

Πόρισμα:

Για $n \geq 2$ και $S \subseteq \mathbb{F}^n$ πεπ/νο υπάρχει μη μηδενικό πολ/μο βαθμού το πολύ $n|S|^{1/n}$ που μηδενίζεται στο S

Θέσε D για το κάτω ακέραιο μέρος του $n|S|^{1/n}$

Εύκολα $\binom{D+n}{n} > |S|$

Γνωρίζουμε ότι :

Αν $P \in Pol_D(\mathbb{F})$ και το

P μηδενίζεται σε $D+1$ σημεία

$\Longrightarrow P$ το μηδενικό πολ/μο

Γνωρίζουμε ότι :

Αν $P \in Pol_D(\mathbb{F})$ και το

P μηδενίζεται σε $D+1$ σημεία

$\Longrightarrow P$ το μηδενικό πολ/μο

Ευθεία στον $\mathbb{F}^n$:

$\{ b + at : t \in \mathbb{F} \}$,

$a \in \mathbb{F}^n \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{F}^n$

Πρόταση :

Έστω $P \in Pol_D(\mathbb{F}^n)$ και έστω ότι το P μηδενίζεται σε $D+1$ σημεία μιας ευθείας L

$$\Longrightarrow P|_L \equiv 0$$

Πρόταση:

Έστω $P \in Pol_D(\mathbb{F}^n)$ και έστω ότι το P μηδενίζεται σε $D+1$ σημεία μιας ευθείας L

$$\Longrightarrow P|_L \equiv 0$$

Απόδειξη:

Παραμετρικοποιούμε την ευθεία

$$\gamma : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}^n$$

$$\gamma(t) = b + ta$$

Θέτουμε

$$Q(t) = P(\gamma(t)) = P(at + b)$$

Θέτουμε

$$Q(t) = P(\gamma(t)) = P(at + b)$$

Q πολυώνυμο μιας μετ/της

βαθμού το πολύ D

Θέτουμε

$$Q(t) = P(\gamma(t)) = P(at+b)$$

Q πολυώνυμο μιας μετ/της

βαθμού το πολύ D

Το P μηδενίζεται σε $D+1$

σημεία της L

Θέτουμε

$$Q(t) = P(\gamma(t)) = P(at + b)$$

Q πολυώνυμο μιας μετ/της βαθμού το πολύ D

Το P μηδενίζεται σε $D+1$ σημεία της L

$\Longrightarrow$ Υπάρχουν $D+1$ τιμές που μηδενίζουν το Q

Θέτουμε

$$Q(t) = P(\gamma(t)) = P(at+b)$$

Q πολυώνυμο μιας μετ/της

βαθμού το πολύ D

Το P μηδενίζεται σε $D+1$

σημεία της L

$\Longrightarrow$ Υπάρχουν $D+1$ τιμές

που μηδενίζουν το Q

$$\Longrightarrow Q \equiv 0$$

$$\Longrightarrow P|_L \equiv 0 \quad \blacksquare$$

Λήμμα Schwartz-Zippel

Έστω $P \in Pol_{q-1}(\mathbb{F}_q^n)$ και

έστω ότι το P μηδενίζεται σε

κάθε σημείο του $\mathbb{F}_q^n$

$$\Longrightarrow P \equiv 0$$

Θεώρημα:

Κάθε σύνολο Kakeya $K \subseteq \mathbb{F}_q^n$ έχει τουλάχιστον $c_n q^n$ στοιχεία,

$$c_n = (10n)^{-n}$$

Θεώρημα:

Κάθε σύνολο Kakeya $K \subseteq \mathbb{F}_q^n$ έχει τουλάχιστον $c_n q^n$ στοιχεία,

$$c_n = (10n)^{-n}$$

Απόδειξη:

Έστω προς άτοπο $K \subseteq \mathbb{F}_q^n$ Kakeya με $|K| < (10n)^{-n} q^n$

Θεώρημα:

Κάθε σύνολο Kakeya $K \subseteq \mathbb{F}_q^n$ έχει τουλάχιστον $c_n q^n$ στοιχεία, $c_n = (10n)^{-n}$

Απόδειξη:

Έστω προς άτοπο $K \subseteq \mathbb{F}_q^n$ Kakeya με $|K| < (10n)^{-n} q^n$

$\Longrightarrow$ $\exists$ πολ/μο $P \neq 0$,

$\deg P \leq n|K|^{1/n} < q$,

$P(k) = 0 \ \forall k \in K$

Έστω $D = \deg P$

Γράφουμε

$$P = P_D + Q$$

Έστω $D = \deg P$

Γράφουμε

$$P = P_D + G$$

όπου P_D ομογενές βαθμού D

$(\neq 0)$

και G βαθμοί $< D$

Έστω $a \in \mathbb{F}_q^n \setminus \{0\}$

Βρίσκουμε $b \in \mathbb{F}_q^n$ με

$\{b + ta : t \in \mathbb{F}_q\} \subseteq K$

Έστω $a \in \mathbb{F}_q^n \setminus \{0\}$

Βρίσκουμε $b \in \mathbb{F}_q^n$ με

$$\{b + ta : t \in \mathbb{F}_q\} \subseteq K$$

Έστω $R(t) := P(b + at)$

$$\left.\begin{array}{l} R(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{F}_q \\ \deg R \leq D < q \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow R \equiv 0$$

Έστω $a \in \mathbb{F}_q^n \setminus \{0\}$

Βρίσκουμε $b \in \mathbb{F}_q^n$ με

$\{b + ta : t \in \mathbb{F}_q\} \subseteq K$

Έστω $R(t) := P(b + at)$

$$\left.\begin{array}{l} R(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{F}_q \\ \deg R \leq D < q \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow R \equiv 0$

$\Longrightarrow$ Ο συντελεστής του t^D

είναι 0

ΌΜΩΣ, ο συντελεστής του t^D είναι το $P_D(\alpha)$

ΌΜΩΣ, ο συντελεστής

του t^D είναι το $P_D(a)$

$\Longrightarrow P_D(a) = 0$

$P_D(0) = 0$ αφού P_D ομογενές

ΌΜΩΣ, ο συντελεστής του t^D είναι το $P_D(a)$

$$\Longrightarrow P_D(a) = 0$$

$P_D(0) = 0$ αφού P_D ομογενές

$$\Longrightarrow P_D(x) = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{F}_q^n$$

ΌΜΩΣ, ο συντελεστής του t^D είναι το $P_D(a)$

$$\left.\begin{array}{l} \Longrightarrow P_D(a) = 0 \\ P_D(0) = 0 \text{ αφού } P_D \text{ ομογενές} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Longrightarrow P_D(x) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{F}_q^n \end{array}\right\}$$

$$\xRightarrow{S-Z}$$

$$P_D \equiv 0$$

ΌΜΩΣ, ο συντελεστής του t^D είναι το $P_D(a)$

$$\Longrightarrow P_D(a) = 0$$

$P_D(0) = 0$ αφού P_D ομογενές

$$\Longrightarrow P_D(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{F}_q^n$$

$$\xrightarrow{\text{S-Z}}$$

$P_D \equiv 0$, άτοπο

$\blacksquare$

Σας ευχαριστώ!