Πανεπιστημιο Κρητησ

Τμημα Μαθηματικων & Εφαρμοσμενων Μαθηματικων

Χειμερινο Εξαμηνο 2016 – 2017

Θεωρία Συνόλων (ΜΕΜ 242)

Τελική Εξέταση: 16/01/2017

ΖΗΤΗΜΑ 1. Έστω A, B και C δεδομένα σύνολα.

(i) Υπολογίστε τα: $\bigcap\bigcap\langle A, B\rangle$, $\bigcup\bigcap\langle A, B\rangle$ και $\bigcap\bigcup\langle A, B\rangle$.

(ii) Δείξτε από τα αξιώματα ότι υπάρχουν τα σύνολα $\{A, B, C\}$ και $A \cup B \cup C$. Σε κάθε περίπτωση, να αναφέρετε ποιό ακριβώς αξίωμα της (ZFC) συνολοθεωρίας επικαλείστε σε κάθε βήμα.

ΖΗΤΗΜΑ 2.

(i) Έστω σύνολα A και B τέτοια ώστε $A \subseteq B$. Αν C μη κενό σύνολο, να δείξετε ότι υπάρχει μία 1-1 συνάρτηση της μορφής $F : {}^{A}C \xrightarrow{\text{1-1}} {}^{B}C$.

(ii) Έστω δύο σύνολα x και y τέτοια ώστε $x \neq y$. Θεωρώντας το $I = \{x, y\}$ ως σύνολο δεικτών, έστω A_x και A_y δύο δεδομένα και μη κενά σύνολα τα οποία απαρτίζουν την οικογένεια $(A_i)_{i\in I}$. Ορίστε το γενικευμένο καρτεσιανό γινόμενο $\prod_{i\in I} A_i$ αυτής της οικογένειας και κατόπιν δείξτε ότι

$$\prod_{i\in I} A_i \sim A_x \times A_y\,.$$

ΖΗΤΗΜΑ 3. Έστω $A \subseteq \omega$ με $A \neq \varnothing$. Δείξτε ότι $\bigcap A \in A$.

ΖΗΤΗΜΑ 4. Για αυτό το ζήτημα, θυμηθείτε ότι $2 = \{0, 1\}$.

(i) Έστω πληθάριθμος $\kappa > 1$. Αρχικά, ορίστε το $\kappa \cdot \kappa$, το 2^κ και το κ^κ. Κατόπιν, με χρήση του Θεωρήματος των Cantor-Schröder-Bernstein να δείξετε ότι αν $\kappa \cdot \kappa = \kappa$, τότε $2^\kappa = \kappa^\kappa$.

(ii) Έστω δεδομένο σύνολο A. **Χωρίς χρήση πληθαρίθμων**, δείξτε ότι αν $A \sim A \times 2$, τότε $\mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$.

(Λύση αυτού του ερωτήματος με χρήση πληθαρίθμων απλά δεν λαμβάνεται καθόλου υπ' όψιν.)

ΖΗΤΗΜΑ 5. Έστω $\langle A, <_A\rangle$ καλά διατεταγμένο σύνολο (με $A \neq \varnothing$) και έστω $b \notin A$. Θεωρούμε το σύνολο $B = A \cup \{b\}$, στο οποίο ορίζουμε τη διμελή σχέση $<_B$ ως ακολούθως. Για κάθε $x, y \in B$:

$$x <_B y \longleftrightarrow (x \in A \wedge y \in A \wedge x <_A y) \vee (x \in A \wedge y = b)\,.$$

Αρχικά, δείξτε ότι το A είναι γνήσιο αρχικό τμήμα του $\langle B, <_B\rangle$. Κατόπιν, δείξτε ότι η σχέση $<_B$ είναι καλή διάταξη στο σύνολο B.

Τα ζητήματα είναι ισοδύναμα. Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες.

Καλή επιτυχία!

Ενδεικτικές Λύσεις/Υποδείξεις*

ΖΗΤΗΜΑ 1.

(*i*) Ξέρουμε ότι $\langle A,B\rangle = \{\{A\},\{A,B\}\}$. Επομένως, έχουμε ότι $\bigcap\langle A,B\rangle = \{A\}\cap\{A,B\} = \{A\}$ και $\bigcup\langle A,B\rangle = \{A\}\cup\{A,B\} = \{A,B\}$. Συνεπώς:

$$\bigcap\bigcap\langle A,B\rangle = \bigcap\{A\} = A\,,$$

$$\bigcup\bigcap\langle A,B\rangle = \bigcup\{A\} = A\,,$$

και

$$\bigcap\bigcup\langle A,B\rangle = \bigcap\{A,B\} = A\cap B\,.$$

(*ii*) Δεδομένων των A, B και C, χρησιμοποιώντας το Αξίωμα του Ζεύγους δις, μία φορά για τα σύνολα A και B και μία φορά για τα σύνολα C και C, προκύπτουν τα σύνολα $\{A,B\}$ και $\{C\}$ αντίστοιχα. Δεδομένων των δύο αυτών συνόλων, από το Αξίωμα του Ζεύγους πάλι, προκύπτει το σύνολο $\{\{A,B\},\{C\}\}$. Από αυτό το σύνολο τώρα, και από το Αξίωμα της (γενικευμένης) Ένωσης, προκύπτει το σύνολο $\bigcup\{\{A,B\},\{C\}\}$ δηλαδή το σύνολο $\{A,B,C\}$, που είναι ένα από τα ζητούμενα. Τέλος, από το σύνολο $\{A,B,C\}$ και από το Αξίωμα της (γενικευμένης) Ένωσης πάλι, προκύπτει και το σύνολο $\bigcup\{A,B,C\}$, δηλαδή το σύνολο $A\cup B\cup C$, που είναι το έτερο ζητούμενο.

ΖΗΤΗΜΑ 2.

(*i*) Αφού $C\neq\varnothing$, έστω κάποιο στοιχείο $a\in C$. Για κάθε συνάρτηση $s\in {}^{A}C$, θεωρούμε τη συνάρτηση $g_s : B\longrightarrow C$ η οποία ορίζεται ως εξής. Για κάθε $x\in B$:

$$g_s(x) = \begin{cases} s(x) & ,\ \text{αν } x\in A\\ a & ,\ \text{αν } x\in B\backslash A.\end{cases}$$

Ορίζουμε λοιπόν τη συνάρτηση $F : {}^{A}C \longrightarrow {}^{B}C$ η οποία, για κάθε $s\in {}^{A}C$, δίνει τιμή $F(s) = g_s$, όπως αυτή ορίστηκε παραπάνω. Τότε, είναι εύκολο να δείτε ότι η συνάρτηση F είναι 1-1, δηλαδή ότι είναι της μορφής $F : {}^{A}C \xrightarrow{\text{1-1}} {}^{B}C$, όπως ζητείται.

Παρατηρήστε ότι στην ειδική περίπτωση που $A = B = \varnothing$ έχουμε ότι ${}^{A}C = {}^{B}C = \{\varnothing\}$. Τότε, η $F = \{\langle\varnothing,\varnothing\rangle\}$ είναι προφανώς μία 1-1 συνάρτηση της μορφής $F : \{\varnothing\} \xrightarrow{\text{1-1}} \{\varnothing\}$.

(*ii*) Ξέρουμε ότι, γενικά:

$$\prod_{i\in I} A_i = \{f : \text{η } f \text{ είναι συνάρτηση} \wedge \operatorname{dom}(f) = I \wedge (\forall\, i\in I)(f(i)\in A_i)\}\,.$$

Στην προκειμένη περίπτωση, μία συνάρτηση (επιλογής) f ανήκει στο γενικευμένο καρτεσιανό γινόμενο της δεδομένης οικογένειας αν και μόνο αν είναι της μορφής $f : \{x,y\} \longrightarrow A_x\cup A_y$, με $f(x)\in A_x$ και $f(y)\in A_y$. Δηλαδή:

$$\prod_{i\in I} A_i = \{f : \text{η } f \text{ είναι συνάρτηση} \wedge \operatorname{dom}(f) = \{x,y\} \wedge f(x)\in A_x \wedge f(y)\in A_y\}\,.$$

Παρατηρήστε ότι κάθε τέτοια συνάρτηση f είναι της μορφής $f = \{\langle x, f(x)\rangle, \langle y, f(y)\rangle\}$, με $f(x)\in A_x$ και $f(y)\in A_y$.

Για να δείξουμε τη ζητούμενη ισοπληθικότητα, ορίζουμε τη συνάρτηση $F : \prod_{i\in I} A_i \longrightarrow A_x\times A_y$ ως ακολούθως. Για κάθε $f\in \prod_{i\in I} A_i$, δηλαδή για κάθε συνάρτηση (επιλογής) της μορφής που περιγράψαμε παραπάνω, θέτουμε:

$$F(f) = \langle f(x), f(y)\rangle\,.$$

* Ημερομηνία: 16 Φεβρουαρίου 2017

Παρατηρήστε ότι για κάθε $f \in \prod_{i \in I} A_i$ έχουμε πράγματι ότι $F(f) \in A_x \times A_y$, όπως πρέπει. Είναι εύκολο να δείτε ότι η συνάρτηση F που μόλις ορίσαμε είναι 1-1 και επί, επομένως φανερώνει τη ζητούμενη ισοπληθικότητα $\prod_{i \in I} A_i \sim A_x \times A_y$.

ΖΗΤΗΜΑ 3. Έστω $A \subseteq \omega$ με $A \neq \varnothing$. Εφόσον το A είναι μη κενό έχει ελάχιστο στοιχείο. Δηλαδή, υπάρχει $n \in \omega$ τέτοιο ώστε $n = \min A$. Προφανώς, $n \in A$. Επίσης, είναι εύκολο να δείτε ότι $n = \bigcap A$ (δείξτε και τους δύο εγκλεισμούς). Επομένως, προκύπτει άμεσα ότι $n = \bigcap A \in A$, όπως ζητείται.

ΖΗΤΗΜΑ 4.

(*i*) Εφόσον $\kappa > 1$, έχουμε προφανώς ότι $2^\kappa \leqslant \kappa^\kappa$. Για την άλλη ανισότητα, υπολογίζουμε ως εξής:

$$\kappa^\kappa \leqslant (2^\kappa)^\kappa = 2^{\kappa \cdot \kappa} = 2^\kappa ,$$

όπου η πρώτη ανισότητα προκύπτει από το ότι $\kappa < 2^\kappa$ (Θεώρημα Cantor), ενώ η τελευταία ισότητα προκύπτει από τη δεδομένη υπόθεση ότι $\kappa \cdot \kappa = \kappa$.

Επόμενως, έχουμε τελικά ότι $2^\kappa \leqslant \kappa^\kappa \leqslant 2^\kappa$ και άρα, από το Θεώρημα των Cantor-Schröder-Bernstein, έπεται ότι $2^\kappa = \kappa^\kappa$.

(*ii*) Εφόσον $A \sim A \times 2$,[1] έστω συνάρτηση $f : A \times 2 \xrightarrow[\text{επί}]{\text{1-1}} A$. Για να δείξουμε ότι $\mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$, θα ορίσουμε μία συνάρτηση $F : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \xrightarrow[\text{επί}]{\text{1-1}} \mathcal{P}(A)$. Αυτό το κάνουμε ως εξής.

Έστω στοιχείο $\langle X, Y\rangle \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$ (δηλαδή, $X \subseteq A$ και $Y \subseteq A$). Δεδομένων των X και Y, θεωρούμε το σύνολο $(X \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\})$. Δηλαδή, «επισυνάπτουμε» ως δεύτερη συντεταγμένη το 0 σε κάθε στοιχείο του X, και «επισυνάπτουμε» ως δεύτερη συντεταγμένη το 1 σε κάθε στοιχείο του Y· κατόπιν, παίρνουμε την ένωση των δύο συνόλων διατεταγμένων ζευγών που προκύπτουν. Παρατηρήστε ότι $(X \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\}) \subseteq A \times 2$. Με αυτά τα δεδομένα, για κάθε $\langle X, Y\rangle \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$, ορίζουμε:

$$F(\langle X, Y\rangle) = f[(X \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\})] ,$$

δηλαδή, το $F(\langle X, Y\rangle)$ είναι η εικόνα μέσω της f του συνόλου $(X \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\})$. Παρατηρήστε ότι $f[(X \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\})] \subseteq A$, δηλαδή $F(\langle X, Y\rangle) \in \mathcal{P}(A)$, όπως πρέπει.

Είναι εύκολο να δείτε ότι η συνάρτηση F που μόλις ορίσαμε είναι 1-1 και επί, από το οποίο άμεσα προκύπτει η ζητούμενη ισοπληθικότητα $\mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$.

ΖΗΤΗΜΑ 5. Έστω $y \in A$ και $x <_B y$. Εξ ορισμού της σχέσης $<_B$, έπεται ότι $x \in A$. Επίσης, προφανώς, $A \subsetneq B$. Επομένως, το A είναι γνήσιο αρχικό τμήμα του $\langle B, <_B\rangle$, όπως ζητείται.

Είναι εύκολο να δείξετε ότι η σχέση $<_B$ είναι ολική διάταξη στο σύνολο B. Παρατηρήστε ότι η διάταξη $<_B$ ταυτίζεται με την $<_A$ στα στοιχεία του συνόλου A, ενώ «τοποθετεί» το στοιχείο b πάνω από όλα τα στοιχεία του A. Με άλλα λόγια, η $<_B$ προκύπτει από την $<_A$ προσθέτοντας το «νέο» στοιχείο b ως μέγιστο, πάνω από όλα τα στοιχεία του A.

Για να δείξουμε ότι η $<_B$ είναι και καλή διάταξη, έστω $X \subseteq B$ με $X \neq \varnothing$ ένα οποιοδήποτε μη κενό υποσύνολο του B. Θα δείξουμε ότι το X έχει ελάχιστο στοιχείο (ως προς τη $<_B$). Παρατηρήστε ότι υπάρχουν δύο περιπτώσεις: είτε $X \subseteq A$ είτε $b \in X$.

Αν $X \subseteq A$, εφόσον $X \neq \varnothing$ και η $<_A$ είναι καλή διάταξη στο A, έχουμε ότι υπάρχει ελάχιστο του X ως προς $<_A$. Όμως, όπως είπαμε παραπάνω, η $<_B$ ταυτίζεται με τη $<_A$ στα στοιχεία του A. Επομένως, αυτό το ελάχιστο στοιχείο του X ως προς $<_A$, είναι και ελάχιστο ως προς $<_B$, όπως θέλουμε.

Αν $b \in X$, τότε διακρίνουμε πάλι δύο (υπο)περιπτώσεις: είτε $X = \{b\}$ είτε $X = X' \cup \{b\}$, όπου $X' \subseteq A$ με $X' \neq \varnothing$. Για την πρώτη (υπο)περίπτωση, αν δηλαδή $X = \{b\}$, έχουμε ότι το b είναι προφανώς το ελάχιστο στοιχείο του X (ως προς $<_B$). Για τη δεύτερη (υπο)περίπτωση, έστω ότι $X = X' \cup \{b\}$, όπου $X' \subseteq A$ με $X' \neq \varnothing$. Τότε, υπάρχει ελάχιστο στοιχείο του X' ως προς $<_A$, και είναι εύκολο να δείτε ότι αυτό το στοιχείο είναι και ελάχιστο του X ως προς $<_B$, όπως θέλουμε.

Σε κάθε περίπτωση, δείξαμε ότι το τυχόν μη κενό υποσύνολο του B έχει ελάχιστο στοιχείο (ως προς τη $<_B$). Επομένως, η $<_B$ είναι καλή διάταξη στο σύνολο B, όπως ζητείται.

[1] Παρατηρήστε ότι αυτή η υπόθεση συνεπάγεται ότι το δεδομένο σύνολο A, αν δεν είναι κενό, τότε είναι απαραιτήτως άπειρο. Φυσικά, αν $A = \varnothing$, τότε $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing\}$ και προφανώς ισχύει ότι $\mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$.