

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΑΛΜΑ

ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΥΝΟΛΩΝ

ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2022-2023

Τελική εξέταση: 31/01/2023

Να απαντήσετε σε ακριβώς δύο ζητήματα από την κάθε ομάδα.

Ομάδα Α

ΖΗΤΗΜΑ 1. (2 μονάδες)

- (i) Έστω $A \subseteq \omega$ ένα μεταβατικό υποσύνολο του ω . Να δείξετε ότι αν το A είναι άνω φραγμένο στο ω (ως προς τη συνήθη διάταξη του ω), τότε $A \in \omega$.
 $\exists x \in \omega \text{ τ.ω. } \forall y \in A \quad y < x \quad \exists x \text{ ελάχιστο τέτοιο στο } \omega$
- (ii) Να δείξετε ότι, για κάθε $n, m \in \omega$, ισχύει ότι $|^m n| = n^m$.
 $\hookrightarrow \forall y \in A \quad y \in X$
 $y \subseteq A \quad A \subseteq X$
 Αρχικά ν.σ.σ. $A = X$

ΖΗΤΗΜΑ 2. (2 μονάδες)

Το ζήτημα αυτό να απαντηθεί χωρίς καμία χρήση πληθαρικών.

- (i) Έστω μη κενά σύνολα A και B και έστω δεδομένη επί συνάρτηση $f : A \xrightarrow{\text{επί}} B$. Να δείξετε ότι $|\mathcal{P}(B)| \leq |\mathcal{P}(A)|$.

- (ii) Έστω A, B, C και D δεδομένα και μη κενά σύνολα, για τα οποία ισχύει $|A| \leq |B|$ και $|C| \leq |D|$. Να δείξετε ότι:

$$|^C A| \leq |^D B|$$

ΖΗΤΗΜΑ 3. (2 μονάδες)

- (i) Έστω δεδομένο σύνολο A . Να δείξετε, από τα αξιώματα της ZFC, ότι υπάρχει το σύνολο:

$$B = \{ \langle X, R \rangle : X \subseteq A \wedge \langle R \text{ διατάσσει καλώς το } X \rangle \}$$

- (ii) Να δείξετε ότι, για κάθε $n \in \omega$ και για κάθε X , αν $X \subseteq n$, τότε το X είναι πεπερασμένο.

Ομάδα Β

ΖΗΤΗΜΑ 4. (3 μονάδες)

Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να αποφασίσετε αν η συλλογή που εμφανίζεται είναι σύνολο ή όχι (στο πλαίσιο της ZFC). Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας.

- (i) $\{R : \langle R \text{ είναι σχέση ισοδυναμίας} \rangle\}$
- (ii) $\{x : a \in x\}$, για κάποιο δεδομένο (και σταθεροποιημένο εξαρχής) σύνολο a .
- (iii) $\{x : x \sim \omega\}$
- (iv) $\{a \in \text{ON} : \langle \text{o } a \text{ είναι οριακός} \rangle\}$

ΖΗΤΗΜΑ 5. (3 μονάδες)

(i) Έστω $\langle A, <_A \rangle$, $\langle B, <_B \rangle$ και $\langle C, <_C \rangle$ δεδομένα και καλά διατεταγμένα σύνολα τέτοια ώστε $A, B, C \neq \emptyset$. Στο σύνολο $A \times (B \times C)$ ορίζουμε τη διμελή σχέση $<$ ως εξής. Για κάθε $\langle a, \langle b, c \rangle \rangle, \langle a', \langle b', c' \rangle \rangle \in A \times (B \times C)$:

$$\langle a, \langle b, c \rangle \rangle < \langle a', \langle b', c' \rangle \rangle \iff (a <_A a' \vee (a = a' \wedge b <_B b')) \vee (a = a' \wedge b = b' \wedge c <_C c')$$

Να δείξετε ότι η σχέση $<$ είναι καλή διάταξη στο $A \times (B \times C)$.

(ii) Έστω σύνολο X και έστω διμελής σχέση $<$ στο X τέτοια ώστε τόσο το $\langle X, < \rangle$ όσο και το $\langle X, <^{-1} \rangle$ να είναι καλά διατεταγμένα. Να δείξετε ότι το X είναι πεπερασμένο.

ΖΗΤΗΜΑ 6. (3 μονάδες)

Σε αυτό το ζήτημα, το σύμβολο \mathbb{R} αναφέρεται στο οικείο, γνώριμο από την ανάλυση, σύνολο των πραγματικών αριθμών, ενώ η σχέση $<$ είναι η συνήθης (γνήσια) διάταξη του \mathbb{R} .

(i) Να δώσετε παράδειγμα συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε ο διατακτικός τύπος του $\langle A, < \rangle$ να είναι ίσος με $\omega^2 + \omega + 2$.

(ii) Έστω διατακτικός αριθμός $\alpha \in \text{ON}$ για τον οποίο υπάρχει $A \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε ο διατακτικός τύπος του $\langle A, < \rangle$ να είναι ίσος με α . Να δείξετε ότι $\alpha < \omega_1$.

Καλή επιτυχία!