Υπολογιστική Πολυπλοκότητα (ΑΛΜΑ)
Θέματα Εξετάσεων

21 Ιουνίου 2019

Λύστε όσα από τα παρακάτω θέματα επιθυμείτε:

Θέμα 1°: Θεωρήστε το αλφάβητο $\Sigma = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z\}$ και μία γλώσσα $L \subseteq \Sigma^*$. Δείξτε ότι $L \leq_p \{\text{TROLL}\}$ **αν και μόνο αν** $L \in \mathsf{P}$.

[1 μονάδα]

Θέμα 2°: Υποθέστε ότι $\mathsf{TIME}(n^{\log n}) \subseteq \mathsf{NP}$. Δείξτε ότι $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$.

[1 μονάδα]

Θέμα 3°: Δείξτε ότι η γλώσσα:

ΠΑΡΑΛΙΓΟ ΚΥΚΛΟΣ ΧΑΜΙΛΤΟΝ $= \{\langle G, k\rangle \in \Sigma^* \mid G = (V, E)$ γράφημα, k φυσικός αριθμός με $k \geq 1$ και υπάρχει $S \subseteq V$, με $|S| = k$, τέτοιο ώστε το γράφημα που προκύπτει μετά την αφαίρεση των κορυφών του S από το G έχει κύκλο Χάμιλτον$\}$

είναι NP-πλήρης.

[2 μονάδες]

Θέμα 4°: Δείξτε ότι η γλώσσα:

$$7{\times}\mathrm{SAT} = \{\langle\phi\rangle \in \Sigma^* \mid \phi \text{ λογικός τύπος για τον οποίο υπάρχουν} \geq 7 \text{ αποτιμήσεις που τον ικανοποιούν}\}$$

είναι NP-πλήρης.

[2 μονάδες]

Θέμα 5°: Θεωρήστε τις γλώσσες:

ΜΟΝΟΠΑΤΙ $= \{\langle G, s, t\rangle \in \Sigma^* \mid G$ γράφημα στο οποίο υπάρχει μονοπάτι από την κορυφή s στην κορυφή $t\}$

ΠΟΛΥ ΜΑΚΡΥ ΜΟΝΟΠΑΤΙ $= \{\langle G, s, t, k\rangle \in \Sigma^* \mid G$ γράφημα, k φυσικός αριθμός με $k \geq 2^{2^{2019}}$ και υπάρχει στο G μονοπάτι από την κορυφή s στην κορυφή t μήκους $\geq k\}$

α. Δείξτε ότι για κάθε γλώσσα $L \in \mathsf{LSPACE}$ ισχύει ότι $L \leq_L$ ΜΟΝΟΠΑΤΙ [1].

β. Δείξτε ότι ΜΟΝΟΠΑΤΙ $\leq_L$ ΠΟΛΥ ΜΑΚΡΥ ΜΟΝΟΠΑΤΙ.

[2 μονάδες]

---

[1] **Δεν μπορείτε** να χρησιμοποιήσετε το γεγονός ότι $\mathsf{LSPACE} = \mathsf{SL}$.

Θέμα 6ο: Ας αποδείξουμε ότι $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$:

Απόδειξη. Έστω (προς άτοπο) ότι $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$. Τότε, αφού $3\mathrm{SAT} \in P$, υπάρχει ντετερμινιστική Μ.Τ. που αποφασίζει την 3SAT σε χρόνο $O(n^{k_1})$, για κάποιο $k_1 \in \mathbb{N}$. Αφού η 3SAT είναι NP-δύσκολη γλώσσα έπεται ότι για οποιαδήποτε γλώσσα $L \in \mathsf{NP}$ υπάρχει πολυωνυμική αναγωγή από την L στην 3SAT. Έστω ότι η συνάρτηση της αναγωγής υπολογίζεται σε χρόνο $O(n^{k_2})$, για κάποιο $k_2 \in \mathbb{N}$. Άρα υπάρχει ντερμινιστική Μ.Τ. που αποφασίζει την L σε χρόνο $O(n^k)$, όπου $k = \max\{k_1, k_2\}$. Επομένως ισχύει ότι $\mathsf{NP} \subseteq \mathsf{TIME}(n^k)$. Από το Θεώρημα Χρονικής Ιεραρχίας ξέρουμε ότι $\mathsf{TIME}(n^k) \subsetneq \mathsf{TIME}(n^{k+1})$ και αφού $\mathsf{TIME}(n^{k+1}) \subseteq \mathsf{P}$ έπεται ότι $\mathsf{NP} \subsetneq \mathsf{P}$. Άτοπο. □

Βρείτε το λάθος στην παραπάνω απόδειξη. **(Αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας!)**

[2 μονάδες]

Θέμα 7ο: Θεωρήστε την γλώσσα:

$$L = \{\langle M, w\rangle \in \Sigma^* \mid \text{Η } M \text{ αποδέχεται την } w \text{ χωρίς να ξεπεράσει ποτέ το } (|w|+1)\text{-οστό κελί της ταινίας}\}$$

Δείξτε ότι η L είναι PSPACE-πλήρης. [2]

[3 μονάδες]

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες (αυστηρά).

[2] *Υπόδειξη:* Μπορεί να σας φανεί χρήσιμο το γεγονός ότι $\mathsf{QSAT} \in \mathsf{SPACE}(n)$.