Ανάλυση ΙΙ - Εξέταση εαρινού εξαμήνου 2023-24: 3 Ιουνίου 2024

Σχόλια:

- Όλοι οι διανυσματικοί χώροι που εμφανίζονται σε αυτή την εξέταση θεωρούνται διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{R}$.
- Κάθε άσκηση πιάνει **2 μονάδες**.
- Δε χρειάζεται να κάνετε επιλογή 5 ασκήσεων από τις 6 - απαντήστε σε όποια ερωτήματα επιθυμείτε.
- Αν x είναι το σύνολο των μονάδων που θα μαζέψετε, ο τελικός βαθμός της εξέτασης θα είναι x στα 10.

1. Σε αυτή την άσκηση συμβολίζουμε με λ το μέτρο Lebesgue στο $[0,1]$.
   a) Έστω $T_0 : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ με $T_0(f) = f(0)$ για κάθε $f \in C([0,1])$.
      (i) Δείξτε ότι υπάρχει $T \in \left(L^\infty([0,1])\right)^*$ με $T_{|C([0,1])} = T_0$.
      (ii) Δείξτε ότι *δεν υπάρχει* $g \in L^1([0,1])$ ώστε: $T(f) = \int_{[0,1]} fg \, d\lambda$ για κάθε $f \in L^\infty([0,1])$.
   b) Έστω $1 < p < +\infty$, $f \in L^p([0,1])$ και $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη ακολουθία στον $L^p([0,1])$. Δείξτε ότι $f_n \xrightarrow{w} f$ αν και μόνο αν
   $$\int_A f_n \, d\lambda \to \int_A f \, d\lambda \qquad \text{για κάθε Lebesgue-μετρήσιμο } A \subseteq [0,1].$$

2. a) Δείξτε ότι κάθε κλειστός υπόχωρος ενός αυτοπαθούς χώρου $(Y, \|\cdot\|)$ είναι επίσης αυτοπαθής.
   b) Έστω K άπειρο, συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$ (με τη συνήθη μετρική). Σταθεροποιούμε μία ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ διαφορετικών ανά δύο στοιχείων του K, και ορίζουμε τη γραμμική απεικόνιση $T : \ell^1 \to C(K)^*$ ως εξής: για κάθε $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots) \in \ell^1$,
   $$T(y)(f) := \sum_{n=1}^{+\infty} y_n f(x_n) \quad \text{για κάθε } f \in C(K).$$
      (i) Δείξτε ότι πράγματι $T(y) \in C(K)^*$ για κάθε $y \in \ell^1$.
      (ii) Δείξτε ότι η T είναι ισομετρία.
      (iii) Δείξτε ότι ο $\left(C(K), \|\cdot\|_\infty\right)$ δεν είναι αυτοπαθής.

3. a) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα, $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον X^*, και $x^* \in X^*$ με $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$. Δείξτε ότι $\|x^*\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|x_n^*\|$ και ότι, αν επιπλέον ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι Banach, τότε η $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη.
   b) Κατασκευάστε μία *φραγμένη* ακολουθία $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ στον $(\ell^\infty)^*$, η οποία να μην έχει w^*-συγκλίνουσα υπακολουθία. Γιατί αυτό δεν έρχεται σε αντίφαση με το Θεώρημα Alaoglu;

4. a) Έστω $(X,\mathscr{T})$ τοπικά κυρτός χώρος, με τοπολογία $\mathscr{T}$ που παράγεται από μία οικογένεια $\mathscr{P}$ ημινορμών $p: X \to [0,+\infty)$. Έστω $A \subseteq X$. Λέμε ότι το A είναι φραγμένο αν, για κάθε $U \in \mathscr{T}$ με $0 \in U$, υπάρχει $s \in \mathbb{R}$ ώστε $A \subseteq s \cdot U$.

   Δείξτε ότι το A είναι φραγμένο αν και μόνο αν το $p(A)$ είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για κάθε $p \in \mathscr{P}$.

   b) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, συμβολίζουμε με e_n το διάνυσμα του ℓ^2 με n-οστή συντεταγμένη 1 και όλες τις άλλες συντεταγμένες ίσες με 0. Ορίζουμε

$$A := \{e_m + m e_n : m < n,\ m,n \in \mathbb{N}\} \subset (\ell^2, \|\cdot\|_2).$$

   Δείξτε ότι $0 \in \overline{A}^w$, αλλά και ότι δεν υπάρχει ακολουθία στο A που να συγκλίνει ασθενώς στο 0.

5. a) Έστω $(X,\|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα, $x \in X$, και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον X με $x_n \xrightarrow{w} x$. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X, με $y_n \in \mathrm{conv}\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ώστε $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$.

   b) Έστω $(X,\|\cdot\|)$ αυτοπαθής, με την ιδιότητα ότι η $(\widetilde{B}_X, w)$ είναι μετρικοποιήσιμη. Έστω $K \subset X$ $\|\cdot\|$-κλειστό, κυρτό και φραγμένο, και έστω $f: K \to \mathbb{R}$ κυρτή[1] και $\|\cdot\|$-συνεχής. Δείξτε ότι, αν η f είναι κάτω φραγμένη, τότε έχει ελάχιστη τιμή.

   Υπόδειξη: Το (a) μπορεί να φανεί χρήσιμο εδώ.

6. Έστω $(X,\|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα, και $K \subseteq X$ κυρτό.

   a) Έστω $x \in K$. Δείξτε ότι $x \in \mathrm{ex}(K)$ αν και μόνο αν: για κάθε $y,z \in K$ με $x = \frac{y+z}{2}$, έχουμε ότι $y = z = x$.

   b) Έστω ότι επιπλέον το K είναι συμπαγές στον $(X,\|\cdot\|)$. Δείξτε ότι

$$K \setminus \mathrm{ex}(K) = \left\{ x \in K : \ \frac{y+z}{2} \ \text{για κάποια } y,z \in K \text{ με } \|y-z\| > 0 \right\}$$

   και ότι το $\mathrm{ex}(K)$ είναι G_δ-σύνολο.

Καλή επιτυχία!

[1] Λέγοντας ότι η f είναι κυρτή εννοούμε ότι $f\big(tx + (1-t)y\big) \leq t f(x) + (1-t) f(y)$ για κάθε $x,y \in X$ και $t \in [0,1]$. Επαγωγικά, η ανάλογη ανισότητα ισχύει για κυρτούς συνδυασμούς τυχαίων στοιχείων του X.