

Σχόλια:

- Όλοι οι διανυσματικοί χώροι που εμφανίζονται σε αυτή την εξέταση θεωρούνται διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{R}$.
- Η εξέταση πάνει 10 μονάδες. Στο βαθμό της εξέτασης θα προστεθεί ο βαθμός των εργασιών (με άριστα το 2) για να υπολογισθεί ο τελικός βαθμός.

1. (1.5 μονάδες) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$ και $f: A \rightarrow \mathbb{R}^d$ με την ιδιότητα ότι υπάρχουν σταθερές $M \in (0, +\infty)$ και $\gamma \in (0, 1)$ ώστε

$$|f(x) - f(y)| \leq M \cdot |x - y|^\gamma \quad \text{για κάθε } x, y \in A.$$

- a) Δείξτε ότι, για κάθε $s \geq 0$,

$$H^{s/\gamma}(f(A)) \leq M^{s/\gamma} \cdot H^s(A).$$

- b) Δείξτε ότι $\dim_H f(A) \leq \frac{1}{\gamma} \dim_H A$.

2. (1.5 μονάδες)

- a) Έστω $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ χώρος εσωτερικού γινομένου, και έστω $\| \cdot \|$ η επαγόμενη νόρμα. Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στον X και $x \in X$, με $x_n \xrightarrow{w} x$ και $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$. Δείξτε ότι $\|x_n - x\| \rightarrow 0$.

- b) Έστω $(X, \| \cdot \|)$ χώρος με νόρμα, με $\dim X = +\infty$. Δείξτε ότι $\overline{S_X}^w = \widetilde{B}_X$.

3. (1.5 μονάδες)

- a) Έστω $(X, \| \cdot \|)$ χώρος με νόρμα, με $\dim X = +\infty$. Δείξτε ότι η $\| \cdot \| : X^* \rightarrow \mathbb{R}$ δεν είναι w^* -συνεχής σε κανένα $x_0^* \in X^*$.

- b) Έστω $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ φραγμένη ακολουθία στον $L^\infty([0, 1])$. Εξηγήστε γιατί υπάρχουν υπακολουθία $(f_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ και $f \in L^\infty([0, 1])$ ώστε

$$\int_A f_{k_n} d\lambda \rightarrow \int_A f d\lambda \quad \text{για κάθε Lebesgue-μετρήσιμο } A \subseteq [0, 1].$$

4. (2 μονάδες) Έστω ο χώρος $X := C([0, 1]) = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ συνεχής}\}$, εφοδιασμένος με την $\| \cdot \|_\infty$.

- (i) Δείξτε ότι τα ακραία σημεία της μπάλας $\widetilde{B}_X$ είναι οι σταθερές συναρτήσεις 1 και -1 (στο $[0, 1]$).

- (ii) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Krein-Milman, εξηγήστε γιατί ο $(C([0, 1]), \| \cdot \|_\infty)$ δεν είναι αυτοπαθής.

5. (1.5 μονάδες) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα, και $K \subseteq X$ ανοιχτό, κυρτό και ισορροπημένο. Θεωρούμε το συναρτησοειδές του Minkowski $p_K : X \rightarrow [0, +\infty)$, με

$$p_K(x) := \inf\{t \geq 0 : x \in tK\}.$$

Ορίζουμε

$$Y := \{f \in X^* : f(x) \leq p_K(x) \text{ για κάθε } x \in X\}.$$

Ο στόχος αυτής της άσκησης είναι ναδειχθεί ότι

$$K := \bigcap_{f \in Y} \{x \in X : f(x) < 1\}.$$

a) Δείξτε ότι

$$K \subseteq \bigcap_{f \in Y} \{x \in X : f(x) < 1\}.$$

b) Έστω $x_0 \notin K$. Ορίζουμε $f_0 : \text{span}\{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$f_0(tx_0) := t, \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}.$$

(i) Δείξτε ότι υπάρχει γραμμική επέκταση $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ της f_0 , με $|f(x)| \leq p_K(x)$ για κάθε $x \in X$.

(ii) Δείξτε ότι αυτή η f είναι στον X^* .

(iii) Εξηγήστε γιατί

$$x_0 \notin \bigcap_{f \in Y} \{x \in X : f(x) < 1\}.$$

6. (2 μονάδες) Έστω L_0 ο χώρος των Lebesgue-μετρησίμων $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Ορίζουμε την τοπολογία $\mathcal{T}$ στον L_0 , με την ιδιότητα ότι η $\mathcal{B}_0 := \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$, όπου

$$B_n := \left\{ f \in L_0 : \lambda(\{x \in [0, 1] : |f(x)| > 1/n\}) < \frac{1}{n} \right\} \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N},$$

είναι βάση περιοχών του $0 \in L_0$, και η $\mathcal{B}_{f_0} := f_0 + \mathcal{B}_0$ είναι βάση περιοχών της f_0 , για κάθε $f_0 \in L_0$. Δείξτε τα εξής:

a) $\text{conv}(B_n) = L_0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

b) Ο $(X, \mathcal{T})$ δεν είναι τοπικά κυρτός.

Καλή επιτυχία!