Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Μαθηματικών
Εξετάσεις στην Μεταπτυχιακή Άλγεβρα I
Παρασκευή 8 Φεβρουαρίου 2019 μ.Χ.

1. Δώστε από ένα παράδειγμα πεπερασμένης ομάδας G για τις παρακάτω κατηγορίες ομάδων : κυκλικές, αβελιανές, μηδενοδύναμες και επιλύσιμες, έτσι ώστε κάθε παράδειγμα που ανήκει σε μια κατηγορία να μην ανήκει στην προηγούμενη (δηλ. η αβελιανή να μην είναι κυκλική κ.ο.κ.). Στη συνέχεια δώστε αντίστοιχα παραδείγματα άπειρων (και πεπερασμένα παραγόμενων) ομάδων για κάθε μία από τις παραπάνω κλάσεις ομάδων. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας. **(1,5)**

2. Έστω πεπερασμένη ομάδα G που δρα σ' ένα σύνολο X (δηλαδή $G \curvearrowright X$).
(α) Αν $Orb_G(x)$ είναι η τροχιά και $Stab_G(x)$ η σταθεροποιούσα του στοιχείου $x \in X$, να δείξετε ότι $|Orb_G(x)| = |G : Stab_G(x)|$.**(0,5)**
(β) Αν $|G\backslash X|$ είναι ο πληθάριθμος των τροχιών της δράσης και $Fix(g) = \{x \in X | g \cdot x = x\}$ το σύνολο σταθερών σημείων του $g \in G$, να δείξετε ότι $|G \setminus X| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix(g)|$. **(1)**

3. (α) Έστω G πεπερασμένη ομάδα και P μια $Sylow$ p-υποομάδα της. Αν H είναι μια υποομάδα της G, η οποία ταυτίζεται με την κανονικοποιούσα της P, δηλαδή $H = N_G(P)$, να δείξετε ότι $N_G(H) = H$. **(1)**
(β) Δείξτε ότι μια ομάδα τάξεως 45 δεν είναι απλή.**(0,5)**

4. Έστω G επιλύσιμη ομάδα και $f : G \to H$ ομομορφισμός ομάδων. Υποθέτουμε ότι $Imf \lhd H$ και ότι η H/Imf είναι αβελιανή ομάδα. Δείξτε ότι η H είναι επιλύσιμη και ότι για κάθε $r \in \Gamma_2(H)$ υπάρχει $g \in G$ τέτοιο ώστε $f(g) = r$. **(1,5)**

5. (α) Να βρεθούν όλες οι (μη ισόμορφες) ομάδες τάξεως 8.**(1)**
(β) Βρείτε το πλήθος των (μη ισόμορφων) αβελιανών ομάδων τάξεως 2520 και 2021.**(0,5)**

6. (α) Έστω H, K κανονικές υποομάδες μιας ομάδας G. Να δείξετε ότι $[H, K] \leq H \cap K$.
(β) Έστω p, q διακεκριμένοι περιττοί πρώτοι αριθμοί. Δείξτε ότι μια ομάδα τάξεως pq είναι κυκλική.
(γ) Έστω G ομάδα με τάξη 15. Δείξτε ότι η ομάδα αυτομορφισμών $Aut(G)$ είναι μια $p-$ομάδα.
(δ) Έστω G ομάδα με τάξη 33. Δείξτε ότι η ομάδα αυτομορφισμών $Aut(G)$ είναι επιλύσιμη.**(0,5+0,5+0,5+0,5=2)**

7. Να βρεθεί ένα σύνολο γεννητόρων X της ομάδας μεταθέσεων S_3 και στη συνέχεια να σχεδιάσετε το αντίστοιχο γράφημα *Cayley* $\Gamma(S_3, \{X\})$. Να σχεδιάσετε τα γραφήματα *Cayley* της ομάδας $\mathbb{Z}$ για δύο διαφορετικά σύνολα γεννητόρων. Τι ισχύει για τα γραφήματα *Cayley*, μιας ομάδας G, αν αλλάξω το σύνολο γεννητόρων ; **(1)**

8. (α) Έστω $F_2 =< a, b >$ η ελεύθερη ομάδα σε δύο γεννήτορες, Δείξτε ότι η απεικόνιση $\theta : F_2 \to F_2$ με $\theta(a) = ab$ και $\theta(b) = a^{-1}$ ορίζει έναν αυτομορφισμό της F_2. Υπολογίστε τον αντίστροφό του. Υπάρχει $w \in F_2$ έστι ώστε $\theta(w) = w$; **(1)**
(β) Έστω $G = F_2 \times \mathbb{Z}$ το ευθύ γινόμενο της ελεύθερης ομάδας σε 2 γεννήτορες με την άπειρη κυκλική. Να δείξετε ότι υπάρχουν πεπερασμένα παραγόμενες υποομάδες H, K της G έτσι ώστε η υποομάδα $H \cap K$ να είναι απείρως παραγόμενη. **(1)**

9. (α) Δώστε δύο παραδείγματα άπειρων ομάδων έτσι ώστε: η πρώτη να είναι ισόμορφη με ελεύθερο γινόμενο δύο πεπερασμένων ομάδων και η δεύτερη να είναι ισόμορφη με ελεύθερο γινόμενο δύο πεπερασμένων ομάδων με αμάγαλμα.**(0,5)**
(β) Να περιγράψετε και να σχεδιάσετε το σύνηθες δένδρο στο οποίο δρα η $G =< a, b | a^2 = b^3 >$. Υπάρχει $HNN-$επέκταση η οποία να περιέχει ως υποομάδα της την ομάδα G ; **(1)**

Σύνολο μονάδων: 14
Διάρκεια εξέτασης 3+ ώρες.
Καλή επιτυχία!