Θ3. Άλεγβρα Ι
Εξεταστική περίοδος Φεβρουαρίου 2020

1. Ταξινομήστε (ως προς ισομορφισμό) τις ομάδες τάξεως 63

2. (i) Αποδείξτε ότι μια ομάδα G τάξεως 90 δεν είναι απλή. Είναι επιλύσιμη (αντ. μηδενοδύναμη);

   (ii) Αν η ομάδα αυτομορφισμών Aut(G) μιας ομάδας G είναι μηδενοδύναμη,τότε η G είναι μηδενοδύναμη. [Υπόδειξη: $\frac{G}{Z(G)} \cong Inn(G)$]

   Ισχύει το αντίστροφο;

3. (i) Έστω $G = *_{i \in I} G_i$ όπου κάθε παράγοντας G_i είναι μη τετριμμένος και H υποομάδα πεπερασμένου δείκτη στην G. Αν $K \cap H = \{1\}$ τότε η K περιέχεται σε συζυγές κάποιου ελεύθερου παράγοντα.

   (ii) Έστω F_2 η ελεύθερη ομάδα σε 2 το πλήθος γεννήτορες. Υπολογίστε το πλήθος των υποομάδων της F_2 δείκτου 2.

4. (i) Αν $G = \langle X | R \rangle$ τότε μια ομάδα K είναι πηλίκο της G αν και μόνο αν $K \cong \langle X | R \cup S \rangle$.

   (ii) Έστω Γ μια πεπερασμένα παραγόμενη αβελιανή ομάδα και G μια πεπερασμένα παραγόμενη προσεγγιστικά πεπερασμένη ομάδα. Υποθέτουμε ότι οι Γ,G είναι ελευθέρας στρέψης και ότι έχουν τα ίδια πεπερασμένα πηλίκα. Δηλαδή {K : K πεπερασμένο πηλίκο της Γ}={F: F πεπερασμένο πηλίκο της G}.

   (α) Αποδείξτε ότι η G είναι αβελιανή.

   (β) Αποδείξτε ότι Γ ≅ G.