

Μεταπτυχιακή Άλγεβρα Ι

Εξετάσεις 27 Ιανουαρίου 2025

Θέμα 1^ο:

i) Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα, η οποία δρώ πιστά στο πεπερασμένο σύνολο X , με τροχιές $X_1, X_2, \dots, X_k$. Υποθέτουμε ότι κάθε τροχιά έχει πληθικό αριθμό $|X_i| = n_i$. Δείξτε ότι η G μπορεί να εμφυτευθεί στην $S_{n_1} \times S_{n_2} \times \dots \times S_{n_k}$. [3]

ii) Έστω G πεπερασμένη ομάδα και p πρώτος αριθμός με $p \nmid |G|$. Αν X είναι το σύνολο των Sylow p - υποομάδων της G , ορίζουμε μια δράση της ομάδας αυτομορφισμών $\text{Aut}(G)$ επί του X $\text{Aut}(G) \times X \rightarrow X$ ως εξής: $(\alpha, P) \rightarrow \alpha(P)$. Δείξτε ότι η δράση είναι καλά ορισμένη και μεταβατική. Να βρεθεί ο πυρήνας του ομομορφισμού $f : \text{Aut}(G) \rightarrow S_X$. [3]

Θέμα 2^ο:

Έστω $G_1 = \langle a_1, b_1 \rangle$ και $G_2 = \langle a_2, b_2, c_2 \rangle$ ελεύθερες αβελιανές ομάδες διάστασης 2 και 3 αντίστοιχα. Αν $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ ο ομομορφισμός ομάδων που ορίζεται ως εξής: $\varphi(a_1) = b_2 c_2$, $\varphi(b_1) = a_2 c_2$ και $\vartheta : G_1 \rightarrow (\mathbb{Q}, +)$ ο ομομορφισμός ομάδων που ορίζεται ως εξής: $\vartheta(a_1) = 1/3$, $\vartheta(b_1) = 1/2$ να ορίσετε έναν ομομορφισμό ομάδων $\tau : G_2 \rightarrow (\mathbb{Q}, +)$ έτσι ώστε $\vartheta = \tau \circ \varphi$. [3]

Πόσοι ομομορφισμοί $\tau : G_2 \rightarrow (\mathbb{Q}, +)$ ορίζονται έτσι ώστε $\vartheta = \tau \circ \varphi$; [2]

Αν αντί του φ πάρουμε τον ομομορφισμό $\xi : G_1 \rightarrow G_2$ που ορίζεται ως: $\xi(a_1) = b_2 c_2$, $\xi(b_1) = b_2 c_2$, μπορούμε να ορίσουμε ομομορφισμό ομάδων $\zeta : G_2 \rightarrow (\mathbb{Q}, +)$ έτσι ώστε $\vartheta = \zeta \circ \xi$? [3]

Θέμα 3^ο:

Έστω F ελεύθερη ομάδα και H κανονική υποομάδα της έτσι ώστε το πηλίκο F/H να είναι πεπερασμένο με τάξη που διαιρείται από τουλάχιστον δύο διαφορετικούς πρώτους αριθμούς, και $\gamma_n(F) \leq H$, όπου $\gamma_n(F)$ είναι ο n -οστος όρος της κατώτερης κεντρικής σειράς της F , για κάποιον ακέραιο $n \geq 2$. Δείξτε ότι:

i) Υπάρχουν M και N κανονικές υποομάδες της F έτσι ώστε $M \cap N = H$ και $gH \cdot rH = rH \cdot gH$ για κάθε $g \in M$ και $r \in N$. [3]

ii) Η ομάδα F/H έχει μη τετριμμένο κέντρο, του οποίου η τάξη διαιρείται από τουλάχιστον δύο διαφορετικούς πρώτους αριθμούς. [3]

(Διατυπώστε, με σαφήνεια χωρίς απόδειξη, γνωστά αποτελέσματα, τα οποία θα επικαλεσθείτε.)

Θέμα 4^ο:

1. Δείξτε ότι μια ομάδα G με τάξη ίση με 144 δεν είναι απλή. [3]

2. Έστω G πεπερασμένη ομάδα με $|G| = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \dots \cdot p_k^{m_k}$, όπου p_i διακεκριμένοι πρώτοι. Δείξτε ότι η G είναι επιλύσιμη αν και μόνο αν το μήκος κάθε συνθετικής σειράς της G ισούται με $\sum_{i=1}^n m_i$. [4]

3. Έστω G πεπερασμένη επιλύσιμη ομάδα. Δείξτε ότι κάθε ελάχιστη κανονική υποομάδα της είναι στοιχειώδης αβελιανή και χαρακτηριστική στην G . [3]

4. Έστω G πεπερασμένη ομάδα. Δείξτε ότι η G δεν είναι επιλύσιμη αν και μόνο αν περιέχει μια κανονική μη τετριμμένη υποομάδα H με $H = H'$. [4]

(Επίσης δείξτε ότι στην μια κατεύθυνση μπορούμε να αντικαταστήσουμε την απαίτηση 'κανονική μη τετριμμένη υποομάδα H με $H = H'$ ' με την "ασθενέστερη" 'τυχαία μη τετριμμένη υποομάδα H με $H = H'$ '.)

Θέμα 5^ο:

1. Έστω μια ελεύθερη ομάδα $F = \langle X \rangle$ και $v, w \in F$ με $v \cdot w = w \cdot v$. Δείξτε ότι υπάρχει $u \in F$ με την ιδιότητα $v = u^n$, $w = u^m$, όπου $n, m \in \mathbb{Z}$. [3]
2. Έστω μια ελεύθερη ομάδα $F = \langle X \rangle$. Δείξτε ότι η μεταθετικότητα είναι μεταβατική. Δηλαδή αν $vw = wv$ και $wu = uw$, τότε $vu = uv$. [2]
Δώστε ένα παράδειγμα ομάδας όπου η μεταθετικότητα δεν είναι μεταβατική. [2]
3. Έστω G και $N \triangleleft G$. Υποθέτουμε ότι το πηλίκο G/N είναι ελεύθερη ομάδα. Δείξτε ότι υπάρχει F ελεύθερη υποομάδα της G ώστε η G να διασπάται (ως ημιευθύ γινόμενο) επί της N δια της F . [4]
4. Έστω F ελεύθερη ομάδα και H υποομάδα της πεπερασμένου δείκτη. Δείξτε ότι για κάθε άλλη μη τερτιμμένη υποομάδα της F η τομή της με την H είναι μη τερτιμμένη. [2]
5. Έστω $F = \langle a, b \rangle$ η ελεύθερη ομάδα σε δύο γεννήτορες. Δείξτε ότι η απεικόνιση $\varphi : F \rightarrow F$ με $\varphi(a) = ab$ και $\varphi(b) = b^{-1}a^{-2}$ ορίζει έναν αυτομορφισμό της F . Να υπολογίσετε τον αντίστροφό του. [4]
Να ορίσετε έναν μονομορφισμό της F , ο οποίος δεν είναι αυτομορφισμός. [2]

Θέμα 6^ο:

- i) Έστω $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ η ελεύθερη αβελιανή διάστασης 2 και $S = \{(a, 1), (1, b)\}$. Να "περιγράψετε" το γράφημα Cayley $\mathcal{G}(G, S)$. [3]
- ii) Έστω G μια ομάδα και $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ένα σύνολο γεννητόρων της. Έστω $\mathcal{G}(G, S)$ το αντίστοιχο γράφημα Cayley και H η υποομάδα της G η παραγόμενη από τα στοιχεία $a_2, a_3, \dots, a_n$. Από το γράφημα $\mathcal{G}(G, S)$ διαγράφουμε όλες τις ακμές που αντιστοιχούν στον γεννήτορα a_1 .
Δείξτε ότι προκύπτει ένα γράφημα, του οποίου οι συνεκτικές συνιστώσες είναι ισόμορφες μεταξύ τους και κάθε μια από αυτές έχει ως κορυφές τα στοιχεία ενός συμπλόκου gH . [4]

Απαντήστε σε όσον το δυνατόν περισσότερα ερωτήματα. Για να λάβετε άριστα, πρέπει να συγκεντρώσετε τουλάχιστον 45 μονάδες. Για προβιβάσιμο βαθμό αρκούν 25 μονάδες.