

Θ3 Άλγεβρα Ι
Σεπτέμβριος 2025

1. Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα τάξεως 55 η οποία δρα επί ενός συνόλου X με $|X| = 23$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $gx = x$, για κάθε $g \in G$.
Υποθέτουμε ότι υπάρχει μοναδικό στοιχείο $x \in X$ με την ανωτέρω ιδιότητα. Μπορείτε να υπολογίσετε το μέγεθος των τροχιών των υπολοίπων στοιχείων του συνόλου X ;
2. Έστω G μια πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα και H μια υποομάδα της G πεπερασμένου δείκτη. Αποδείξτε ότι το σύνολο $\{\varphi(H) \mid \varphi \in \text{Aut}(G)\}$ είναι πεπερασμένο.
3. Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα, p ένας πρώτος διαιρέτης της τάξεως της G και $P \in \text{Syl}_p(G)$. Αν $n_p = 1$ και $\text{mcd}(|\text{Aut}(P)|, |G|) = 1$, τότε η p -υποομάδα του Sylow P περιέχεται στο κέντρο της G .
4. Έστω F_n και F_m ελεύθερες ομάδες τάξεως n και m , αντίστοιχα. Αν οι ομάδες F_n και F_m έχουν τις ίδιες πεπερασμένες επιμορφικές εικόνες (κάθε πεπερασμένο πηλίκο της μιας είναι και πηλίκο της άλλης), τότε οι F_n και F_m είναι ισόμορφες.
5. Υπάρχει μη-αβελιανή, ελεύθερη, επιλύσιμη ομάδα. Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.
6. Έστω $\varphi : G \rightarrow H$ ομομορφισμός ομάδων, όπου η G είναι μηδενοδύναμη. Αποδείξτε ότι ο φ είναι μονομορφισμός αν και μόνο αν ο περιορισμός του $\varphi|_{Z(G)}$ στο κέντρο $Z(G)$ είναι μονομορφισμός.
7. Έστω G μια ομάδα η οποία περιέχει πεπερασμένη κανονική υποομάδα K έτσι ώστε η αντίστοιχη ομάδα πηλίκο G/K είναι άπειρη κυκλική. Αποδείξτε ότι η G περιέχει κανονική, άπειρη κυκλική υποομάδα πεπερασμένου δείκτη.
8. Έστω $F(X)$ η ελεύθερη ομάδα επί του X , $Y \subseteq X$ ένα υποσύνολο του X και N η κανονική υποομάδα που παράγεται από το Y (η μικρότερη κανονική υποομάδα που περιέχει το Y). Αποδείξτε ότι η ομάδα πηλίκο $F(X)/N$ είναι ελεύθερη.

Η πλήρης απάντηση εκάστου θέματος αντιστοιχεί σε 1.5 μονάδες.

Καλή επιτυχία