Άλγεβρα Ι
26 Φεβρουαρίου 2024

1. Μια ομάδα τάξεως $216 = 2^3 \cdot 3^3$ δεν είναι απλή. Είναι απαραιτήτως μηδενοδύναμη (επιλύσιμη);

2. Έστω G μια πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα και H μια υποομάδα της G πεπερασμένου δείκτη. Αποδείξτε ότι το σύνολο $\{ \phi(H) \mid \phi \in \mathrm{Aut}G \}$ είναι πεπερασμένο.

3. Δίνεται ομάδα G με παράσταση $< a, b \mid a = ba^2b^{-1} >$. Είναι η G τετριμμένη, πεπερασμένη ή άπειρη ομάδα;

4. Να βρεθεί ο μικρότερος περιττός n για τον οποίο υπάρχει μη αβελιανή ομάδα τάξεως n.

5. Έστω G μια ομάδα και H, K δύο μηδενοδύναμες ομάδες. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν ομομορφισμοί $\varphi : G \to H$ και $\psi : G \to K$ έτσι ώστε $\ker\varphi \cap \ker\psi \subseteq Z(G)$. Αποδείξτε ότι η G είναι μηδενοδύναμη.

6. Αποδείξτε ότι οι ομάδες $\mathbf{Z}_3 * \mathbf{Z}_3$, $\mathbf{Z}_3 * \mathbf{Z}_3 * \mathbf{Z}_3$ και $\mathbf{Z} * \mathbf{Z}_3$ είναι ανά δύο μη ισόμορφες.

7. Έστω G μια ομάδα η οποία δρα επί ενός συνόλου X και α, β δύο στοιχεία της G. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν δύο μη κενά υποσύνολα A, B του X και ένα στοιχείο $p \in X \setminus (A \cup B)$ έτσι ώστε $\alpha^n \cdot (B \cup \{p\}) \subseteq A$ και $\beta^n \cdot (A \cup \{p\}) \subseteq B$ για κάθε $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$. Να δειχθεί ότι η υποομάδα $< \alpha, \beta >$ της G που παράγεται από τα α και β είναι ελεύθερη τάξεως 2 και το σύνολο $\{\alpha, \beta\}$ είναι βάση της $< \alpha, \beta >$.

8.Έστω $\varphi : G \to H$ ομομορφισμός ομάδων, όπου η G είναι μηδενοδύναμη. Αποδείξτε ότι ο φ είναι μονομορφισμός αν και μόνο αν ο περιορισμός του $\varphi|_{Z(G)}$ στο κέντρο $Z(G)$ είναι μονομορφισμός.

Τα θέματα δόθηκαν σε τρία μέρη. Η εξέταση είχε γίνει διαδικτυακά.