**Θ3 Άλγεβρα Ι**
**Εξέταση Σεπτεμβρίου 2024**

**Άσκηση 1η** $(i)$ Έστω $K, H$ δύο ομάδες, $\phi : K \to \mathrm{Aut}(H)$ ομομορφισμός και $\sigma \in \mathrm{Aut}(K)$. Αποδείξτε ότι οι ομάδες $H \rtimes_{\varphi\circ\sigma} K$ και $H \rtimes_{\varphi} K$ είναι ισόμορφες.

$(ii)$ Να βρεθεί το πλήθος των ομάδων (ως προς ισομορφισμό) τάξεως 63. Υπάρχουν μηδενοδύναμες, μη αβελιανές ομάδες τάξεως 63 ;

**Άσκηση 2η** $(i)$ Έστω $p$ πρώτος, $\mathbf{F}$ ένα πεπερασμένο σώμα χαρακτηριστικής $p$ και $G$ $p$-υποομάδα της γενικής γραμμικής ομάδας $\mathrm{GL}(n, \mathbf{F})$. Αποδείξτε ότι υπάρχει διάνυσμα $0 \neq v \in \mathbf{F}^{n\times 1}$ τέτοιο ώστε $g \cdot v = v$ για κάθε $g \in G$

$(ii)$ Να περιγραφούν όλες οι πεπερασμένα παραγόμενες αβελιανές ομάδες $G$ που ικανοποιούν την ακόλουθη ιδιότητα : για κάθε ζεύγος υποομάδων $H, K$ της $G$ είτε $H \subseteq K$ είτε $K \subseteq H$.

**Άσκηση 3η** $(i)$ Δείξτε ότι μια πεπερασμένη $p$-ομάδα είναι μηδενοδύναμη.

$(ii)$ Αποδείξτε ότι μια ομάδα τάξεως $2^2 \cdot 3^7$ δεν είναι απλή. Είναι απαραιτήτως επιλύσιμη ;

**Άσκηση 4η** $(i)$ Έστω $\varphi : G \to F$ ένας επιμορφισμός ομάδων, όπου $F$ ελεύθερη ομάδα. Αποδείξτε ότι υπάρχει υποομάδα $H$ της $G$ με $H \simeq F$ έτσι ώστε $G = \ker\varphi \rtimes H$.

$(ii)$ Να δειχθεί ότι μια ελεύθερη ομάδα $F(X)$ όπου $X \neq \emptyset$, περιέχει κανονική υποομάδα δείκτου $n$ για κάθε θετικό ακέραιο $n$.

$(iii)$ Μπορεί η ομάδα $F_3 * (\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}) * \mathbf{Z}_{2024}$ να παραχθεί από τέσσερα στοιχεία;

*Απαντήστε σε όλα τα ερωτήματα*
*Καλή επιτυχία !*