Εξέταση αλγεβρικής Θεωρίας αριθμών
22 Ιουνίου 2017

Πρόβλημα 1:

(1) Έστω K αλγεβρικό σώμα αριθμών και R ο δακτύλιος των ακεραίων αλγεβρικών αριθμών. Να αποδειχθεί ότι η ομάδα των μονάδων $E(R)$ του R αποτελείται από τα στοιχεία
$$E(R) = \{\epsilon \in R : N_{K/\mathbb{Q}}(\epsilon) = \pm 1\}.$$

(2) Να βρεθεί η ομάδα των μονάδων του σώματος $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $d \in \mathbb{Z}$, $d < 0$, d ελεύθερος τετραγώνου.

Πρόβλημα 2:

(1) Έστω L/K πεπερασμένη και διαχωρίσιμη επέκταση σωμάτων $[L : K] = n$ και $L = K(\theta)$. Αν $f(x) = \prod_{\nu=1}^{n}(x - \theta_n)$ είναι το ανάγωγο πολυώνυμο του θ να δειχθεί ότι η διακρίνουσα
$$D_{L/K}(1, \theta, \theta^2, \ldots, \theta^{n-1}) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} N_{L/K}(f'(\theta)).$$

(2) Έστω $K = \mathbb{Q}$ και $L = \mathbb{Q}(\zeta_p)$, όπου $\zeta_p = e^{2\pi i/p}$ με $p \neq 2$ πρώτος. Δείξτε ότι
$$D_{\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}} = (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} p^{p-2}.$$
Θεωρήστε γνωστό τον δακτύλιο ακεραίων του L.

(3) Να βρεθούν οι πρώτοι που διακλαδίζονται στην επέκταση $\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}$.

Πρόβλημα 3:

(1) Να υπολογιστεί μια βάση ακαιρεότητας για το σώμα $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $d \in \mathbb{Z}$, d ελεύθερο τετραγώνου, ως συνάρτηση του d.

(2) Να αποδειχτεί ότι για κάθε αλγεβρικό σώμα αριθμών K η διακρίνουσά του D_K ικανοποιεί την σχέση
$$D_K \equiv 0, 1 \mod 4$$

Πρόβλημα 4:

(1) Να οριστεί η ομάδα κλάσεων ενός σώματος αριθμών και να αποδειχθεί ότι αν A^{μ} είναι κύριο ιδεώδες και $(\mu, h) = 1$,όπου h είναι η τάξη της ομάδας κλάσεων, τότε το A είναι επίσης κύριο ιδεώδες.

(2) Θεωρούμε το σώμα $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ και δίνεται ότι οι ακέραιοι αλγεβρικοί του σώματος είναι ο δακτύλιος $R = \mathbb{Z}(\sqrt[3]{2})$. Να βρεθούν τα ιδεώδη του R που διαιρούν το 3 και το 5.

Πρόβλημα 5:

(1) Να οριστεί η ομάδα ανάλυσης και αδράνειας μιας Galois επέκτασης L/K που αντιστοιχεί σε ένα πρώτο ιδεώδες Q του δακτυλίου ακεραίων του L.

(2) Τι σημαίνει για το ιδεώδες Q αν η ομάδα αδράνειας του είναι τετριμμένη; Να οριστούν τα σύμβολα του Frobenius και Artin.

(3) Δίνεται ένας πρώτος $p \neq 2$. Να δειχτεί ότι το σώμα $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ έχει ακριβώς ένα τετραγωνικό υπόσωμα το $\mathbb{Q}\left(\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p}\right)$.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!