

Εξέταση αλγεβρικής Θεωρίας αριθμών
14 Σεπτεμβρίου 2017

Πρόβλημα 1:

- (1) Να ορισθεί η ομάδα κλάσεων ενός σώματος αριθμών και ο αριθμός κλάσεων.
- (2) Αν το A^m είναι κύριο ιδεώδες και το m είναι πρώτο με τον αριθμό κλάσεων τότε και το A είναι κύριο ιδεώδες.

Πρόβλημα 2:

- (1) Να οριστεί η norm ενός πρώτου ιδεώδους των ακεραίων αλγεβρικών ενός σώματος αριθμών και να αποδειχθεί ότι είναι δύναμη πρώτου αριθμού.
- (2) Θεωρούμε το σώμα $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ και δίνεται ότι οι ακέραιοι αλγεβρικοί του σώματος είναι ο δακτύλιος $R = \mathbb{Z}(\sqrt[3]{2})$. Να βρεθούν τα ιδεώδη του R που διαιρούν το 3 και το 5 και να υπολογιστούν οι norm τους.

Πρόβλημα 3:

- (1) Να υπολογιστεί μια βάση ακαιρεότητας για το σώμα $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $d \in \mathbb{Z}$, d ελεύθερο τετραγώνου, ως συνάρτηση του d .
- (2) Να αποδειχθεί ότι για κάθε αλγεβρικό σώμα αριθμών K η διακρίνουσά του D_K ικανοποιεί την σχέση

$$D_K \equiv 0, 1 \pmod{4}$$

Πρόβλημα 4:

- (1) Να οριστεί η ομάδα ανάλυσης και αδράνειας μιας Galois επέκτασης L/K που αντιστοιχεί σε ένα πρώτο ιδεώδες Q του δακτυλίου ακεραίων του L .
- (2) Να αποδειχθεί ότι οι ομάδες ανάλυσης και αδράνειας που αντιστοιχούν σε πρώτα ιδεώδη Q_1, Q_2 του δακτυλίου των ακεραίων του L που επεκτείνουν το ίδιο πρώτο ιδεώδες του δακτυλίου των ακεραίων του L είναι συζυγείς.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2,5 ώρες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!