Μεταπτυχιακή Άλγεβρα ΙΙ - Σεπτέμβριος 2021

Επιμέλεια Λύσεων : Κωνσταντίνος Μπιζάνος

1. Είναι οι επόμενοι ισχυρισμοί σωστοί ή λανθασμένοι ; Να εξηγήσετε την απάντησή σας.

   (α΄) (1 μονάδα) Αν R είναι ένας δακτύλιος, M ένα γινόμενο ημιαπλών R - προτύπων και $r \in \mathrm{rad}(R)$, τότε $rx = 0 \in M$, για κάθε $x \in M$.

   (β΄) (1 μονάδα) Έστω R ένας δακτύλιος και M ένα R - πρότυπο. Αν ο δακτύλιος $\mathrm{End}_R M$ είναι διαιρετικός, τότε το R - πρότυπο M είναι απλό.

   (γ΄) (1 μονάδα) Ο δακτύλιος $\mathbb{M}_2(\mathbb{Q})$ των 2×2 πινάκων με ρητούς συντελεστές είναι απλός.

Λύση.

(α) Ο ισχυρισμός είναι σωστός και προκύπτει άμεσα, αφού γνωρίζουμε ότι για κάθε $r \in \mathrm{rad}(R)$ ισχύει ότι $rN = 0$, για κάθε N ημιαπλό R - πρότυπο.

(β) Ο ισχυρισμός είναι, εν γένει, λανθασμένος. Έστω $R = \mathbb{T}_2(\mathbb{R}) = \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbb{R} \end{pmatrix}$.

Θεωρούμε το R - πρότυπο $M = \mathbb{R}^2 \cong \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbb{R} \end{pmatrix}$ (ως R - πρότυπα). Θα δείξουμε ότι $\mathrm{End}_R M$ είναι διαιρετικός δακτύλιος, ενώ το R - πρότυπο M δεν είναι απλό. Πράγματι, παρατηρήστε ότι κάθε R - γραμμική απεικόνιση $M \to M$ είναι της μορφής $\lambda \mathrm{id}_M$ (γιατί ;), άρα κάθε μη μηδενικός ενδομορφισμός είναι ισομορφισμός.

Παρατηρούμε ότι $\mathrm{rad}(R) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{R} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ και μάλιστα για $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{rad}(R)$ και $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in M$ έχουμε ότι $Av \neq 0$, άρα το M δεν μπορεί να είναι απλό.

(γ) Αν $I \neq 0$ αμφίπλευρο ιδεώδες του R δείξτε ότι $E_{ij} \in I$, για κάθε i, j, και συμπεράνεται ότι $\mathbb{M}_2(\mathbb{Q}) = I$.

2. (2 μονάδες) Έστω R ένας ημιαπλός δακτύλιος, που είναι τέτοιος ώστε το κέντρο του $Z(R)$ είναι ένας απλός δακτύλιος. Να δείξετε ότι ο δακτύλιος R είναι επίσης απλός.

Λύση. Έστω I ιδεώδες του $R = \prod_{i=1}^{r} \mathbb{M}_{n_i}(D_i)$. Άρα, I είναι της μορφής $I = \prod_{j=1}^{r} I_j$, όπου I_j ιδεώδες του $\mathbb{M}_{n_j}(D_j)$. Αφού $\mathbb{M}_{n_j}(D_j)$ απλός, τότε $I_j = 0$ ή $\mathbb{M}_{n_j}(D_j)$, για κάθε j. Αν $0 \neq I$ γνήσιο ιδεώδες του R, τότε υπάρχουν κ, λ ώστε $I_\kappa = \mathbb{M}_{n_\kappa}(D_\kappa)$ και $I_\lambda = 0$. Αφού $Z(R) = \prod_{i=1}^{r} Z(D_i) \cdot I_{n_i}$, τότε

$$Z(R) \cap I = \prod_{j=1}^{r} \left[\underbrace{(Z(D_i) \cdot I_{n_i}) \cap I_j}_{J_j} \right].$$

ιδεώδες του $Z(R)$. Τώρα, $J_\kappa = Z(D_\kappa) \cdot I_{n_\kappa} \neq 0$ και $J_\lambda = 0$, επομένως $0 \neq Z(R) \cap I$ γνήσιο ιδεώδες του $Z(R)$, ενώ $Z(R)$ απλός, άρα καταλήγουμε σε άτοπο.

3. (2 μονάδες) Έστω $R = \mathbb{T}_2(\mathbb{C})$ ο δακτύλιος των άνω τριγωνικών 2×2 πινάκων με μιγαδικούς συντελεστές. Να υπολογίσετε το ριζικό $\mathrm{rad}(R)$ του δακτυλίου R.

Λύση. Θα δείξουμε ότι $\mathrm{rad}(R) = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{C} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}$. Είναι άμεσο ότι $\begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{C} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \subseteq \mathrm{rad}(R)$, αφού για κάθε $A \in \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{C} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}$ και $X \in R$, τότε ο $I_2 - XA$ είναι αντιστρέψιμος. Αντίστροφα, θεωρούμε την απεικόνιση $\varphi \colon R \to \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ με $\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = (a, c)$. Η φ είναι επιμορφισμός δακτυλίων με $\ker \varphi = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{C} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}$. Συνεπώς, ισχύει ότι $R/\ker \varphi \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, ο οποίος είναι Jacobson ημιαπλός, άρα $\mathrm{rad}(R) \subseteq \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{C} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}$.

4. (3 μονάδες) Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα και U, V δύο $\mathbb{C}G$ - πρότυπα με πεπερασμένη διάσταση επί του $\mathbb{C}$ και χαρακτήρες χ_U και χ_V αντίστοιχα. Να δείξετε ότι οι επόμενοι δύο ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

   (α′) Υπάρχουν μη-μηδενικές $\mathbb{C}G$ - γραμμικές απεικονίσεις $U \to V$.

(β′) $\langle \chi_U, \chi_V \rangle \neq 0$

Λύση. Αν L είναι ο $\mathbb{C}$ - διανυσματικός χώρος των $\mathbb{C}G$ - γραμμικών απεικονίσεων $U \to V$, αρκεί να δείξουμε ότι $\dim_{\mathbb{C}} L = \langle \chi_U, \chi_V \rangle$. Αν $\mathbb{C}G = V_1^{n_1} \oplus \cdots \oplus V_r^{n_r}$, όπου $V_1, \ldots, V_r$ τα απλά $\mathbb{C}G$ - πρότυπα, τότε $U = V_1^{k_1} \oplus \cdots \oplus V_r^{k_r}$ και $V = V_1^{m_1} \oplus \cdots \oplus V_r^{m_r}$ με $k_i, m_i \geq 0$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει ο ισομορφισμός $\mathbb{C}$ - δ.χ. :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U, V) \cong \prod_{i,j=1}^{r} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}\left(V_i^{k_i}, V_j^{m_j}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{End}_{\mathbb{C}G}(V_i)^{k_i \cdot m_i} \tag{1}$$

Επίσης γνωρίζουμε ότι

$$\langle \chi_U, \chi_V \rangle = \sum_{i,j} n_i m_j \langle \chi_i, \chi_j \rangle = \sum_{i,j} n_i m_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{r} n_i m_i$$

όπου χ_i ο χαρακτήρας του απλού $\mathbb{C}G$ - προτύπου V_i. Άρα, από την σχέση 1, αρκεί να δείξουμε ότι $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{End}_{\mathbb{C}G}(V_i) = 1$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\mathrm{End}_{\mathbb{C}G}(V_i) = \langle \mathrm{id}_{V_i} \rangle$. Έστω $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}G}(V_i)$ με $\varphi \neq 0$. Αφού φ είναι $\mathbb{C}$ - γραμμική, έστω $\lambda \in \mathbb{C}^*$ ιδιοτιμή της φ (αφού φ ισομορφισμός) και $v \neq 0$ ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της φ. Θα δείξουμε ότι $\varphi = \lambda \cdot \mathrm{id}_{V_i}$. Παρατηρούμε ότι $\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_{V_i} \colon V_i \to V_i$ δεν είναι ισομορφισμός, αφού $\varphi(v) = \lambda v$ με $v \neq 0$, συνεπώς $\varphi = \lambda \cdot \mathrm{id}_{V_i}$, από το λήμμα του Schur.