Άλγεβρα ΙΙ
17/06/2008

ΟΝ/ΜΟ____

ΑΜ______________________________

Διατυπώστε με σαφήνεια τα αποτελέσματα που χρησιμοποιείτε.
Υπάρχουν 4 βαθμολογικά ισοδύναμα θέματα.

Καλή επιτυχία.

1.

a. Έστω G μια μη αβελιανή ομάδα τάξης 8.
   i. Βρείτε το πλήθος των κλάσεων συζυγίας της G.
   ii. Εξετάστε αν κάθε δυο απλά $\mathbb{C}[G]$-πρότυπα με διαστάσεις >1 είναι ισόμορφα.

b. Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν.
   i. Ένα πρότυπο που έχει συνθετική σειρά είναι ημιαπλό.
   ii. Έστω A, B δυο απλές $\mathbb{C}$-άλγεβρες πεπερασμένων διαστάσεων. Αν $\dim_{\mathbb{C}} A = \dim_{\mathbb{C}} B$, τότε $A \simeq B$.

Λύση

a. i. Το πλήθος των κλάσεων συζυγίας είναι το s στην ανάλυση Wedderburn $\mathbb{C}[G] \simeq M_{n_1}(\mathbb{C}) \times ... \times M_{n_s}(\mathbb{C})$. Λαμβάνοντας διαστάσεις έχουμε $8 = n_1^2 + ... + n_s^2$ και συνεπώς έχουμε τις δυνατότητες

$$n_1 = ... = n_8 = 1$$
$$n_1 = ... = n_4 = 1, n_5 = 2$$
$$n_1 = n_2 = 2 .$$

Από αυτές απορρίπτονται η πρώτη γιατί η G δεν είναι αβελιανή και η τρίτη γιατί πάντα υπάρχει κάποιο $n_i = 1$. Άρα $s = 5$.

ii. Από $n_1 = ... = n_4 = 1, n_5 = 2$ έπεται ότι υπάρχει μοναδικό (ως προς ισομορφισμό) απλό πρότυπο διάστασης >1 και άρα η απάντηση είναι ναι.

b.

i. Λάθος, πχ το $\mathbb{Z}_{m^2}$, $m > 1$, έχει συνθετική σειρά ως $\mathbb{Z}$-πρότυπο αλλά δεν είναι ημιαπλό.

ii. Σωστό. Από το Θεώρημα Artin - Wedderburn έχουμε $A \simeq M_m(D_1), B \simeq M_n(D_2)$, όπου D_1, D_2 είναι δακτύλιοι διαίρεσης και πεπερασμένων διαστάσεων $\mathbb{C}$-άλγεβρες. Επειδή το $\mathbb{C}$ είναι αλγεβρικά κλειστό έχουμε $D_1 \simeq D_2 \simeq \mathbb{C}$. Από $\dim_{\mathbb{C}} A = \dim_{\mathbb{C}} B$ έχουμε $m = n$ και άρα $A \simeq B$.

2. Έστω $n>0$ και k ένα σώμα χαρακτηριστικής $p>0$. Θεωρούμε το δακτύλιο $R=k[x]\big/(x^n-1)$.
   a. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.
      i. Κάθε βραχεία ακριβής ακολουθία R-προτύπων διασπάται.
      ii. p δεν διαιρεί το n.
   b. Έστω ότι p διαιρεί το n και $n=mp^a$. Έστω V ένα απλό R-πρότυπο. Δείξτε ότι για κάθε $v\in V$ έχουμε $X^m v=v$, όπου $X=x+(x^n-1)\in R$.

Λύση

a. Πρώτα παρατηρούμε ότι υπάρχει ισομορφισμός αλγεβρών

$$R\simeq k[C_n],$$

όπου C_n κυκλική ομάδα τάξης n. Έχουμε διαδοχικά:

Κάθε βραχεία ακριβής ακολουθία R-προτύπων διασπάται $\Leftrightarrow$

R ημιαπλός $\Leftrightarrow$

$k[C_n]$ ημιαπλός $\Leftrightarrow$ (θεώρημα Maschke δεδομένου ότι $p>0$)

p δεν διαιρεί το n.

b. Ξέρουμε ότι το $J(R)$ περιέχει κάθε μηδενοδύναμο ιδεώδες. Το (X^m-1) είναι μηδενοδύναμο γιατί από το διωνυμικό ανάπτυγμα και το γεγονός ότι για κάθε $i=1,\ldots,p^a-1$, το $\begin{pmatrix} p^a \\ i \end{pmatrix}$ είναι πολλαπλάσιο του p, έπεται ότι

$$(X^m-1)^{p^a}=X^n+(-1)^i\sum_{i=1}^{p^a-1}\begin{pmatrix} p^a \\ i \end{pmatrix}X^{(p^a-i)m}+(-1)^{p^a}=X^n-1=0.$$

Άρα $X^m-1\in J(R)$ που σημαίνει ότι $X^m-1\in AnnV$.

3.

a. Έστω k ένα σώμα και A μια απλή k-άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης. Δείξτε ότι αν υπάρχει μη μηδενικός ομομορφισμός αλγεβρών $M_n(k)\underset{k}{\otimes} A \to M_n(k)$, τότε $A \simeq k$.

b. Δώστε ένα παράδειγμα που δείχνει ότι το προηγούμενο συμπέρασμα γενικά δεν αληθεύει όταν η A δεν είναι απλή.

c. Θεωρούμε την $\mathbb{R}$-άλγεβρα $\mathbb{H}$ (quaternions). Δείξτε ότι η ομάδα $Aut(\mathbb{H})$ των αυτομορφισμών της $\mathbb{R}$-άλγεβρας $\mathbb{H}$ είναι ισόμορφη με την ομάδα $\mathbb{H}^*/\mathbb{R}^*$.

Λύση

a. Η $M_n(k)$ είναι κεντρική και απλή. Επειδή η A είναι απλή, η $M_n(k)\underset{k}{\otimes} A$ είναι επίσης απλή. Άρα κάθε μη μηδενικός ομομορφισμός αλγεβρών $M_n(k)\underset{k}{\otimes} A \to M_n(k)$ είναι 1-1. Παίρνοντας διαστάσεις έχουμε $n^2 \dim_k A \le n^2 \Rightarrow \dim_k A = 1$.

b. Παράδειγμα: $A = k \times k$. Τότε θεωρούμε τη σύνθεση $M_n(k)\underset{k}{\otimes} A \simeq M_n(k)\underset{k}{\otimes} k \times M_n(k)\underset{k}{\otimes} k \simeq M_n(k)\times M_n(k) \to M_n(k)$ όπου η τελευταία απεικόνιση είναι η προβολή στην πρώτη συντεταγμένη.

c. Για κάθε $a \in \mathbb{H} - \{0\}$ θεωρούμε τον ομομορφισμό αλγεβρών $f_a : \mathbb{H} \ni z \mapsto aza^{-1} \in \mathbb{H}$ που είναι ισομορφισμός. Λαμβάνουμε μια απεικόνιση

$$\Phi : \mathbb{H}^* \ni a \mapsto f_a \in Aut(\mathbb{H})$$

που είναι ομομορφισμός ομάδων. Είναι επί από το θεώρημα Skolem-Noether. Ο πυρήνας είναι $\mathbb{H}^* \cap C(\mathbb{H}) = \mathbb{R}^*$. Το ζητούμενο προκύπτει από το πρώτο θεώρημα ισομορφισμών ομάδων.

4. Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα με $|G| = n$.
   a. Έστω χ, ψ χαρακτήρες της G με $\deg \chi = 1$. Αποδείξτε ότι ο χαρακτήρας $\chi\psi$ είναι ανάγωγος αν και μόνο αν ο ψ είναι ανάγωγος.
   b. Έστω $n > 1$ και $m \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση κλάσεων της G που ορίζεται από $\chi(1) = n - m,\ \chi(g) = -m,$ για κάθε $g \in G - \{1\}$. Αποδείξτε ότι ο χ είναι χαρακτήρας αν και μόνο αν $m = 0,1$.

Λύση

a. Επειδή $\deg \chi = 1$ έχουμε $\chi(g) = \pm 1$ για κάθε $g \in G$, οπότε

$$\left\langle \chi\psi, \chi\psi \right\rangle = \frac{1}{n}\sum_{g\in G} \chi(g)\psi(g)\overline{\chi(g)}\overline{\psi(g)} =$$

$$\frac{1}{n}\sum_{g\in G} |\chi(g)|^2 \psi(g)\overline{\psi(g)} = \frac{1}{n}\sum_{g\in G} \psi(g)\overline{\psi(g)} = \left\langle \psi, \psi \right\rangle.$$

Άρα $\left\langle \chi\psi, \chi\psi \right\rangle = 1 \Leftrightarrow \left\langle \psi, \psi \right\rangle = 1$.

b. Παρατηρούμε ότι $\chi = \chi_{reg} - m\chi_1$, όπου χ_{reg} είναι ο χαρακτήρας της κανονικής αναπαράστασης και χ_1 ο τετριμμένος χαρακτήρας. Επειδή $\chi_{reg} = \chi_1 + \chi_2(1)\chi_2 + ... + \chi_s(1)\chi_s$, όπου $Irr(G) = \{\chi_1, ..., \chi_s\}$, οι συντελεστές στην ανάλυση του χ σε άθροισμα αναγώγων χαρακτήρων είναι μη αρνητικοί ακέραιοι αν και μόνο αν $m = 0,1$.

Άλλη λύση χωρίς την αρχική παρατήρηση: Υπολογίζουμε

$$\left\langle \chi, \chi_i \right\rangle = \frac{1}{n}\sum_{g\in G} \chi(g)\overline{\chi_i(g)} =$$

$$\frac{1}{n}\left((n-m)\overline{\chi_i(1)} + \sum_{g\in G-\{1\}} (-m)\overline{\chi_i(g)} \right) =$$

$$\chi_i(1) - m\frac{1}{n}\sum_{g\in G} \overline{\chi_i(g)} =$$

$$\chi_i(1) - m\left\langle \chi_1, \chi_i \right\rangle = \begin{cases} 1-m, & i = 1 \\ \chi_i(1), & i \neq 1. \end{cases}$$

Άρα χ χαρακτήρας $\Leftrightarrow m = 0,1$.