Άλγεβρα ΙΙ

Ιούλιος 2014

Επώνυμο____

Όνομα____

ΑΜ													

Ημ/ία____________________ **Αίθουσα**____________________

1	2	3	4		Σύνολο

- **Δικαιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας.**
- Καλή επιτυχία

Θέμα 1 (3 μον)

1. Έστω A, B υποπρότυπα του R-προτύπου M. Δείξτε ότι αν τα πρότυπα M/A και M/B είναι ημιαπλά, τότε και το $M/A \cap B$ είναι ημιαπλό.
2. Δείξτε ότι αν R είναι δακτύλιος του Artin, τότε ο δακτύλιος $M_n(R)$ είναι της Noether.
3. Δείξτε ότι αν R είναι μεταθετικός δακτύλιος του Artin, τότε ο δακτύλιος $R/J(R)$ είναι ευθύ γινόμενο σωμάτων.
4. Αληθεύει ότι υπάρχει πεπερασμένη ομάδα G με $IrrG = \{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4\}$ και $\deg \chi_i = i,\ \ i = 1, 2, 3, 4$;

<u>Θέμα 2</u> (2 μον) Έστω k σώμα.

1. Δείξτε ότι η ομάδα των k-αυτομορφισμών της k-άλγεβρας $M_n(k)$ είναι ισόμορφη με την ομάδα $GL_n(k)/H$, όπου $H = \{cI_n \,|\, c \in k - \{0\}\}$.
2. Δείξτε ότι ο δακτύλιος $M_m(k) \underset{k}{\otimes} M_n(k)$ είναι ημιαπλός.
3. Έστω U, V δύο $M_m(k) \underset{k}{\otimes} M_n(k)$-πρότυπα με $\dim_{\mathbb{C}} U = \dim_{\mathbb{C}} V < \infty$. Δείξτε ότι $U \simeq V$.

<u>Θέμα 3</u> (2.5 μον) Θεωρούμε το δακτύλιο $R=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & 0 \\ c & 0 & e \end{pmatrix} \mid a,b,c,d,e\in k\right\}$.

1. Ποιο είναι το ιδεώδες $J(R)$; Είναι ο R ημιαπλός;
2. Βρείτε μεγιστικά ιδεώδη I_1, I_2, I_3 του R με $J(R)=I_1\cap I_2\cap I_3$. Αληθεύει ότι τα R-πρότυπα R/I_1 και R/I_2 είναι ισόμορφα;
3. Βρείτε μια συνθετική σειρά του R-προτύπου R.

<u>Θέμα 4</u> (2.5 μον) Έστω V $\mathbb{C}$-διανυσματικός χώρος με βάση $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Θεωρούμε το V ως $\mathbb{C}[S_3]$-πρότυπο με εξωτερικό πολλαπλασιασμό που ορίζεται από

$$\sigma(v_i) = v_{\sigma(i)}, \ i = 1, 2, 3,$$
$$\sigma(v_4) = v_4,$$

όπου $\sigma \in S_3$.

1. Βρείτε τον πίνακα χαρακτήρων της S_3 και στη συνέχεια παραστήστε το χαρακτήρα χ του V ως γραμμικό συνδυασμό των ανάγωγων χαρακτήρων της S_3.
2. Αληθεύει ότι $V^{S_3} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} V^{S_3} = (V \underset{\mathbb{C}}{\otimes} V)^{S_3}$;
3. Θεωρούμε το $\mathbb{C}[S_3]$-υποπρότυπο $U = \{a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 \mid a_i \in \mathbb{C}, a_1 + a_2 + a_3 = 0\}$ του V. Δείξτε ότι το U είναι απλό.

Πρόχειρο (1/3)