

Άλγεβρα Β
Σεπτέμβριος 2014

Επώνυμο _____

Όνομα _____

ΑΜ

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Ημ/ια _____ Αίθουσα _____

1		2		3		4			Σύνολο
---	--	---	--	---	--	---	--	--	--------

- Δικαιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας.
- Καλή επιτυχία

Θέμα 1 (3 μον)

1. Έστω $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow R \rightarrow 0$ ακριβής ακολουθία R -προτύπων. Δείξτε ότι οι αβελιανές ομάδες $\text{Hom}_R(N, M)$ και $\text{Hom}_R(M, M) \oplus M$ είναι ισόμορφες
2. Δείξτε ότι αν ο R είναι ημιαπλός δακτύλιος, τότε και ο $M_n(R)$ είναι ημιαπλός.
3. Να ταξινομηθούν ως προς ισομορφισμό οι ημιαπλοί δακτύλιοι τάξης 5^4 .
4. Αληθεύει ότι κάθε δακτύλιος του Artin που δεν έχει μη μηδενικά μηδενοδύναμα στοιχεία είναι ισόμορφος με ευθύ γινόμενο δακτυλίων διαίρεσης;

Θέμα 2 (2 μον)

1. Διατυπώστε και αποδείξτε το Θεώρημα του Maschke για την ημιαπλότητα του δακτυλίου $k[G]$ πεπερασμένης ομάδας G πάνω από σώμα k .
2. Ποιο είναι το ριζικό του Jacobson του δακτυλίου $\frac{\mathbb{Z}_p[x]}{(x^{10}-1)}$, όπου p πρώτος;

Θέμα 3 (2.5 μον)

1. Βρείτε την ομάδα των \mathbb{R} αυτομορφισμών της \mathbb{R} -άλγεβρας \mathbb{H} χρησιμοποιώντας το θεώρημα των Skolem-Noether.
2. Έστω k σώμα.
 - a. Δείξτε ότι υπάρχει ισομορφισμός k -άλγεβρών $M_m(k) \otimes_k M_n(k) \cong M_{mn}(k)$.
 - b. Έστω U, V δύο $M_m(k) \otimes_k M_n(k)$ πρότυπα με $\dim_{\mathbb{C}} U = \dim_{\mathbb{C}} V < \infty$. Δείξτε ότι $U \cong V$ και ο ακέραιος mn διαιρεί τον ακέραιο $\dim_{\mathbb{C}} U$.

Θέμα 4 (2 μον)

1. Αν για το χαρακτήρα χ της πεπερασμένης ομάδας G ισχύει $\chi(g) = 0 \quad \forall g \in G, g \neq 1$, δείξτε ότι ο χ είναι της μορφής $m\chi_{reg}$, $m \in \mathbb{N}$.
2. Έστω V ένα ανάγωγο $\mathbb{C}[S_3]$ -πρότυπο με $\dim_{\mathbb{C}} V = 2$. Αληθεύει ότι $\mathbb{C}[S_3] \simeq V \oplus (V \otimes_{\mathbb{C}} V)$;

