

**Άλγεβρα Β**  
Ενδιάμεση Εξέταση, Μάρτιος 2016

Επώνυμο \_\_\_\_\_

Όνομα \_\_\_\_\_

ΑΜ 

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Ημ/ία \_\_\_\_\_ Αίθουσα \_\_\_\_\_

1		2		3		4			Σύνολο
---	--	---	--	---	--	---	--	--	--------

- Δικαιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας.
- Καλή επιτυχία

**Θέμα 1** Έστω  $k$  σώμα και  $G$  πεπερασμένη ομάδα.

1. Διατυπώστε το Θεώρημα του Maschke για την ημιαπλότητα του δακτυλίου  $k[G]$  και δείξτε μία κατεύθυνσή του.
2. Για ποιες  $G$  ο δακτύλιος  $\mathbb{C}[G]$  είναι απλός;

**Θέμα 2** Ποιοι από τους παρακάτω δακτύλιους είναι ημιαπλοί; Βρείτε, αν υπάρχει, μια συνθετική σειρά για τον καθένα ως πρότυπο πάνω από τον εαυτό του.

- $\mathbb{Q} \times M_2(\mathbb{C})$
- $\frac{\mathbb{Q}[x]}{((x-1)^3)}$ .

### Θέμα 3

1. Έστω  $M$   $R$ -πρότυπο του Artin και  $f : M \rightarrow M$  μονομορφισμός  $R$ -προτύπων. Δείξτε ότι ο  $f$  είναι ισομορφισμός.
2. Έστω  $R$  δακτύλιος του Artin και  $a \in R$  στοιχείο με την ιδιότητα: αν  $b \in R$  και  $ba = 0$ , τότε  $b = 0$ . Δείξτε ότι υπάρχει  $c \in R$  με  $ca = 1$ .

**Θέμα 4** Έστω  $k$  σώμα και  $R$  ο δακτύλιος  $R = \{(a_{ij}) \in M_3(k) \mid a_{21} = a_{31} = 0\}$ .

1. Δείξτε ότι  $J(R) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in R \right\}$ .

2. Ποιο είναι το πλήθος των ανά δύο μη ισόμορφων απλών  $R$ -προτύπων;





