

Άλγεβρα ΙΙ

Εξέταση Ιουνίου 2021

Άσκηση 1. (1 + 1 + 1 = 3 μονάδες)

Είναι οι επόμενοι ισχυρισμοί σωστοί ή λανθασμένοι; Να εξηγήσετε την απάντησή σας.

(α) Αν R είναι ένας δακτύλιος, M ένα ημιαπλό R -πρότυπο και $r \in \text{rad } R$, τότε $rx = 0 \in M$ για κάθε $x \in M$.

(β) Αν R είναι ένας δακτύλιος, M ένα ημιαπλό R -πρότυπο και ο δακτύλιος $\text{End}_R M$ είναι ένας διαιρετικός δακτύλιος, τότε το R -πρότυπο M είναι απλό.

(γ) Ο δακτύλιος $\mathbf{M}_2(\mathbf{Z})$ των 2×2 πινάκων με ακέραιους συντελεστές είναι ημιαπλός.

Άσκηση 2. (2 μονάδες)

Έστω R ένας ημιαπλός δακτύλιος. Να αποδείξετε ότι το κέντρο $Z(R)$ του δακτυλίου R είναι επίσης ένας ημιαπλός δακτύλιος.

Άσκηση 3. (2 μονάδες)

Έστω $R = T_2(\mathbf{Z})$ ο δακτύλιος των άνω τριγωνικών 2×2 πινάκων με ακέραιους συντελεστές. Να υπολογίσετε το ριζικό $\text{rad } R$ του δακτυλίου R .

Άσκηση 4. (3 μονάδες)

Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα και U, V δύο $\mathbf{C}G$ -πρότυπα με πεπερασμένη διάσταση επί του \mathbf{C} και χαρακτήρες χ_U και χ_V αντίστοιχα. Να δείξετε ότι οι επόμενοι δύο ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

(α) Υπάρχει μόνο μία $\mathbf{C}G$ -γραμμική απεικόνιση $U \rightarrow V$, η μηδενική.

(β) $\langle \chi_U, \chi_V \rangle = 0$.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2.5 ώρες. Καλή επιτυχία!