

Θέμα 1

Έστω R δακτύλιος με μονάδα. Δείξτε ότι τα δεξιά ιδεώδη του $M_2(R)$ είναι της μορφής

$$M_{1 \times 2}(I) := \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \mid (a, b), (c, d) \in I \right\},$$

όπου I είναι δεξιό R -υποπρότυπο του R . $\mathbb{R}^2$

Θέμα 2

Δώστε το παράδειγμα ενός δακτυλίου που είναι J -ημιαπλός, αλλά όχι ημιαπλός. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Θέμα 3

1. Ταξινομήστε (ως προς ισομορφισμό) όλες τις $\mathbb{C}$ -άλγεβρες διάστασης 9.
2. Ποιες από τις παραπάνω άλγεβρες μπορούν να προκύψουν ως άλγεβρα ομάδας $\mathbb{C}[G]$ μιας ομάδας G τάξης 9 και γιατί;
3. Έστω G_1, G_2 δύο ομάδες τάξης 9 με $\mathbb{C}[G_1] \cong \mathbb{C}[G_2]$. Ισχύει ότι $G_1 \cong G_2$;

Θέμα 4

Θεωρούμε τη διεδρική ομάδα

$$D_{10} = \langle r, s \mid r^5 = s^2 = (sr)^2 = 1 \rangle,$$

που είναι η ομάδα συμμετριών του κανονικού πενταγώνου. Οι κλάσεις συζυγίας της D_{10} είναι:

$$\{1\}, \{s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}, \{r, r^4\}, \{r^2, r^3\}.$$

1. Δείξτε ότι η απεικόνιση $\rho : D_{10} \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{C})$ με

$$\rho(r) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \rho(s) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix},$$

όπου $\theta = \frac{2\pi}{5}$, είναι αναπαράσταση της D_{10} (έχουμε $\cos \theta = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ και $\sin \theta = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$).

2. Δείξτε ότι η παραπάνω αναπαράσταση είναι ανάγωγη.
3. Κατασκευάστε τον πίνακα χαρακτήρων της D_{10} .
4. Χρησιμοποιώντας τον πίνακα χαρακτήρων, να βρείτε τις κανονικές υποομάδες της D_{10} .
5. Έστω μια αναπαράσταση της D_{10} επί του $\mathbb{C}$ με χαρακτήρα χ . Δείξτε ότι αν $\chi(s) = 0$, τότε $\chi(1)$ είναι άρτιος.
6. Είναι η ομάδα D_{10} επιλύσιμη;