

ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ: ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΑΡΙΝΟΥ 2025–2026

Θέμα 1. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με Σωστό ή Λάθος. Σε κάθε περίπτωση να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

- (i) Έστω R δακτύλιος και $J(R)$ το ριζικό του Θασοβσον του R . Αν $r \in R$ με $r + J(R)$ αντιστρέψιμο στοιχείο του $R/J(R)$, τότε r είναι αντιστρέψιμο στοιχείο του R . [0.8]
- (ii) Έστω R δακτύλιος και $J(R)$ το ριζικό του Θασοβσον του R . Αν M είναι ένα R -πρότυπο, τότε $J(R)M = 0$. [0.8]
- (iii) Δεν υπάρχει ημιαπλός δακτύλιος R με $|R| = 2026$. [0.8]
- (iv) Έστω $\mathbb{F}$ σώμα, χαρακτηριστικής $p > 0$, και $R = \mathbb{F}[x]/\langle x^p \rangle$. Θεωρούμε το ιδεώδες $I = \langle x^{p-1} \rangle / \langle x^p \rangle \subset R$. Το R -πρότυπο R/I είναι προβολικό. [0.8]
- (v) Έστω $\mathbb{F}$ σώμα και $\mathfrak{S}_n$ η συμμετρική ομάδα με $n \geq 2$. Θεωρούμε το $\mathbb{F}[\mathfrak{S}_n]$ -πρότυπο

$$V = \left\{ \lambda \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) \sigma \mid \lambda \in \mathbb{F} \right\}$$

Αν U είναι απλό $\mathbb{F}[\mathfrak{S}_n]$ -πρότυπο τότε το $U \otimes_{\mathbb{F}} V$ είναι απλό $\mathbb{F}[\mathfrak{S}_n]$ -πρότυπο. [0.8]

Θέμα 2. Έστω $\mathbb{F}$ σώμα. Θεωρούμε τον δακτύλιο

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix} \mid A, B \in M_n(\mathbb{F}) \right\}.$$

- (i) Να δείξετε ότι ο δακτύλιος R είναι δακτύλιος του Αρτιν. [0.8]
- (ii) Να προσδιορίσετε το ριζικό του Θασοβσον $J(R)$ του R και να εξετάσετε αν ο R είναι ημιαπλός. [1.1]
- (iii) Να δείξετε ότι ο δακτύλιος $R/J(R)$ είναι απλός δακτύλιος του Αρτιν. [0.8]
- (iv) Να προσδιορίσετε, ως προς ισομορφισμό, όλα τα απλά αριστερά R -πρότυπα. [0.8]

Θέμα 3. Έστω G, H πεπερασμένες ομάδες, V ένα $\mathbb{C}[G]$ -πρότυπο και W ένα $\mathbb{C}[H]$ -πρότυπο με χαρακτήρες χ_V και χ_W , αντίστοιχα. Θεωρούμε το τανυστικό γινόμενο $V \otimes_{\mathbb{C}} W$ ως $\mathbb{C}[G \times H]$ -πρότυπο, μέσω της δράσης

$$(g, h) \cdot (v \otimes w) = gv \otimes hw.$$

- (i) Να εκφράσετε τον χαρακτήρα του $\mathbb{C}[G \times H]$ -προτύπου $V \otimes_{\mathbb{C}} W$ συναρτήσει των χαρακτήρων χ_V και χ_W . [0.8]
- (ii) Να δείξετε ότι αν τα V και W είναι απλά πρότυπα, τότε και το $\mathbb{C}[G \times H]$ -πρότυπο $V \otimes_{\mathbb{C}} W$ είναι απλό. [0.8]
- (iii) Να δείξετε ότι αν $\{V_i\}_{i=1}^m$ και $\{W_j\}_{j=1}^n$ είναι πλήρη σύνολα αντιπροσώπων των κλάσεων ισομορφίας των απλών $\mathbb{C}[G]$ -προτύπων και $\mathbb{C}[H]$ -προτύπων αντίστοιχα, τότε το

$$\{V_i \otimes_{\mathbb{C}} W_j \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$$

είναι ένα πλήρες σύνολο αντιπροσώπων των κλάσεων ισομορφίας των απλών $\mathbb{C}[G \times H]$ -προτύπων. [0.8]

- (iv) Να βρείτε ένα πλήρες σύνολο απλών και ανά δύο μη ισόμορφων $\mathbb{C}[D_6]$ -προτύπων, όπου D_6 είναι η διεδρική ομάδα τάξης 12. [1.1]

-
- Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες.