

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑ – ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2024-25
ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 1 (Θ5=E23)

Θέμα Α Στο $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας

$$(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ ώστε } (x_1, y_1, z_1) = \lambda(x_2, y_2, z_2)$$

και συμβολίζουμε $\mathbb{RP}^2$ το αντίστοιχο σύνολο-πηλίκο. Για κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, συμβολίζουμε $[x : y : z]$ την αντίστοιχη κλάση ισοδυναμίας στο $\mathbb{RP}^2$.

Θεωρούμε τις απεικονίσεις

$$\phi_x : U_x \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi_y : U_y \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi_z : U_z \rightarrow \mathbb{R}^2$$

όπου:

- $U_x = \{[x : y : z] \text{ ώστε } x \neq 0\} \subset \mathbb{RP}^2, \quad \phi_x([x : y : z]) = \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$
- $U_y = \{[x : y : z] \text{ ώστε } y \neq 0\} \subset \mathbb{RP}^2, \quad \phi_y([x : y : z]) = \left(\frac{x}{y}, \frac{z}{y}\right)$
- $U_z = \{[x : y : z] \text{ ώστε } z \neq 0\} \subset \mathbb{RP}^2, \quad \phi_z([x : y : z]) = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$

(α) Δείξτε ότι το σύνολο $\mathcal{A} = \{(U_x, \phi_x), (U_y, \phi_y), (U_z, \phi_z)\}$ ορίζει διαφορική δομή στο $\mathbb{RP}^2$.

(β) Θεωρούμε την απεικόνιση $\Phi : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ με τύπο

$$\Phi([x : y : z]) = \left[\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} : \frac{3y}{x^2 + y^2 + z^2} : \frac{3z}{x^2 + y^2 + z^2} \right] \quad \rightarrow \text{Οι παραγοντιστές χτίζονται}$$

Βρείτε μια βάση του εφαπτόμενου χώρου $T_{[1:0:0]}\mathbb{RP}^2$ και υπολογίστε τις τιμές της $d_{[1:0:0]}\Phi$ στα στοιχεία της βάσης αυτής.

Θέμα Β (α) Να αποδείξετε ότι η απεικόνιση $\theta : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$\theta(t, (x, y)) = (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ορίζει μια απεικόνιση ροής και υπολογίστε τον απειροστικό της γεννήτορα.

(β) Στο $\mathbb{R}^3$ θεωρούμε τα διανυσματικά πεδία $\xi = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}y \frac{\partial}{\partial z}$, $\eta = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}x \frac{\partial}{\partial z}$ και $\zeta = \frac{\partial}{\partial z}$.

Να αποδείχουν οι σχέσεις $\begin{bmatrix} \xi, \eta \\ \xi, \zeta \end{bmatrix}$

$$[\xi, \eta] = [\zeta, \eta] = 0, \quad [\xi, \zeta] = \zeta$$

Να υπολογίσετε τη ροή του ξ .

Θέμα Γ Έστω G μία ομάδα Lie με πεπερασμένη διάσταση.

(α) Να αποδείξετε ότι κάθε αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο της G είναι πλήρες.

(β) Να περιγράψετε την κατασκευή της άλγεβρας Lie $\mathfrak{g}$ της ομάδας Lie G .

(γ) Θεωρούμε την πολλαπλασιαστική ομάδα $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \subset \mathbb{R}$ και ξ το αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο που προκύπτει από το $\partial_t(1) \in T_1(\mathbb{R}_+^*)$. Να βρείτε την ολοκληρωτική καμπύλη του ξ από το $1 \in \mathbb{R}_+^*$.