A

Πιθανότητες ΙΙ

Εξέταση 5 Νοεμβρίου 2011

1. (25 Βαθμοί) Έστω ότι οι τυχαίες μεταβλητές X, Y έχουν από κοινού πυκνότητα

$$f(x,y) = \begin{cases} -xy & \text{αν } (x,y) \in (-1,0)\times(0,1)\cup(1,2)\times(-1,0), \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

(α) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X+Y<0)$.

(β) Να υπολογιστεί η μέση τιμή $E(XY)$.

(γ) Είναι οι X, Y ανεξάρτητες;

2. (30 Βαθμοί) Έστω X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές καθεμία με κατανομή $N(0,1)$.

(α) Ποιά είναι η από κοινού πυκνότητα του ζεύγους $(U,V) := (X/Y, Y)$;

(β) Ποιά είναι η πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής X/Y;

3. (25 Βαθμοί) Έστω $(X_i)_{i\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, που καθεμία ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $(-1,1)$. Και έστω N τυχαία μεταβλητή ανεξάρτητη από τις $\{X_i : i \geq 1\}$ και η οποία ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda > 0$. Θέτουμε $S_0 = 0$ και $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ για κάθε θετικό ακέραιο n.

(α) Να υπολογιστεί η ροπογεννήτρια $M_{X_1}(t) := E(e^{tX_1})$ της X_1 για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

(β) Να υπολογιστεί η ροπογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής S_N.

4. (15 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών ώστε για κάθε $n \geq 1$ η X_n να ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο n, δηλαδή με πυκνότητα $f_{X_n}(x) = ne^{-nx}\mathbf{1}_{x>0}$. Να δειχθεί ότι $X_n \to 0$ κατά πιθανότητα καθώς $n \to \infty$.

5. (20 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, με καθεμία να ακολουθεί την εκθετική κατανομή με περάμετρο 1. Για κάθε $n \geq 1$ θετικό ακέραιο, θέτουμε $W_n := \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ και $Z_n := W_n - \log n$. Να δειχθεί ότι η ακολουθία $(Z_n)_{n\geq 1}$ συγκλίνει κατά κατανομή στην τυχαία μεταβλητή Z με συνάρτηση κατανομής $F_Z(t) := e^{-e^{-t}}(t \in \mathbb{R})$.

Υπόδειξη: Με βάση τον ορισμό, αρκεί να δείξουμε ότι $F_{Z_n}(t) := P(Z_n \leq t) \to F_Z(t)$ καθώς $n \to \infty$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια είναι $2\frac{1}{2}$ ώρες. **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**

Λύσεις

1. Σε αυτή την άσκηση, βοηθάει πολύ να σχεδιάσει κανείς το χωρίο B που η πυκνότητα f είναι διαφορετική από το 0.

(α) Ολοκληρώνουμε την f στην τομή των χωρίων

$$
\begin{aligned}
A &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y<0\},\\
B &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \neq 0\} = (-1,0)\times(0,1) \cup (1,2)\times(-1,0).
\end{aligned}
$$

Η τομή είναι το τρίγωνο με κορυφές $(-1,1), (-1,0), (0,0)$, και εκεί η f έχει ''ενιαίο τύπο'', ισούται με $-xy$. Άρα

$$P(X+Y<0) = P((X,Y)\in A) = \iint\limits_A f(x,y)\,dxdy = \int_{-1}^0 \int_0^{-x} (-xy)\,dydx = -\int_{-1}^0 x^3\,dx = \frac{1}{4}.$$

(β) Υπολογίζουμε δύο διπλά ολοκληρώματα.

$$E(XY) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} xyf(x,y)\,dydx = \int_{-1}^0 \int_0^1 xy(-xy)\,dydx + \int_1^2 \int_{-1}^0 xy(-xy)\,dydx = \ldots = -8/9.$$

(γ) Οι X, Y δεν είναι ανεξάρτητες, και αυτό μπορεί να δειχθεί με πολλούς τρόπους.

1ος τρόπος. Υπολογίζει κανείς τις περιθώριες f_X, f_Y και δείχνει ότι δεν ισχύει $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ σε όλο[1] το $\mathbb{R}^2$.

2ος τρόπος. Είναι σαφές ότι $A_1 := \{x\in\mathbb{R} : f_X(x)\neq 0\} = (-1,0)\cup(1,2)$ και $A_2 := \{y \in \mathbb{R} : f_Y(y) \neq 0\} = (-1,0)\cup(0,1)$. Αν οι X, Y ήταν ανεξάρτητες τότε η θα είχαμε $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ και άρα $B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y)\neq 0\} = A_1\times A_2$ πράγμα που δεν ισχύει. Το B το έχουμε γράψει στο ερώτημα (α) και δεν είναι καρτεσιανό γινόμενο δύο συνόλων, είναι ένωση καρτεσιανών γινομένων.

3ος τρόπος. Έστω $C_1 = (1,2), C_2 = (0,1)$ τότε $P(X\in C_1, Y\in C_2) = 0$ ενώ $P(X \in C_1)P(Y\in C_2) > 0$. Άρα $P(X\in C_1, Y\in C_2) \neq P(X\in C_1)P(Y\in C_2)$.

2. (α) Για τον μετασχηματισμό $T(x,y) := (x/y, y)$, έχουμε $(U,V) = T(X,Y)$, και $T^{-1}(u,v) = (uv, v)$. Ο T^{-1} έχει ιακωβιανή $J_{T^{-1}}(u,v) = v$. Άρα έχουμε

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(T^{-1}(u,v))|J_{T^{-1}}(u,v)| = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}u^2v^2-\frac{1}{2}v^2}|v| = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(u^2+1)v^2}|v|$$

για κάθε $(u,v)\in\mathbb{R}^2$.

(β) Για $u\in\mathbb{R}$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
f_{X/Y}(u) &= \int_{\mathbb{R}} f_{U,V}(u,v)\,dv = | = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(u^2+1)v^2} v\,dv \overset{w=v^2}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(u^2+1)w}\,dw\\
&= \frac{1}{\pi}\frac{1}{(u^2+1)}\int_0^\infty \frac{1}{2}(u^2+1)e^{-\frac{1}{2}(u^2+1)w}\,dw = \frac{1}{\pi}\frac{1}{(u^2+1)}
\end{aligned}
$$

που είναι η πυκνότητα της κατανομής Cauchy. Για την τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η ποσότητα που ολοκληρώνουμε είναι, ως συνάρτηση του w, η πυκνότητα της εκθετικής κατανομής με παράμετρο $(u^2+1)/2$.

3. (α) Για κάθε $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ έχουμε,

$$M_{X_1}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{tx} f_{X_1}(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 e^{tx}\,dx = \frac{e^t - e^{-t}}{2t},$$

[1] Σε κάποια συγκεκριμένα x, y ίσως να ισχύει η ισότητα, αλλά αυτό δεν αρκεί για να αποδείξει κανείς ανεξαρτησία.

και προφανώς $M_{X_1}(0) = E(e^0) = 1$.

(β) Ο τύπος για την M_{S_N} είναι στην θεωρία του μαθήματος, και συνοπτικά η απόδειξή του είναι

$$M_{S_N}(t) = E(e^{tS_N})) = E(E(e^{tS_N} \mid N)) = E((M_{X_1}(t))^N).$$

Τώρα για την περίπτωση μας, υπολογίζουμε για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ότι[2]

$$E(a^N) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a\lambda)^n}{n!} = e^{a\lambda - \lambda}.$$

Άρα $M_{S_N}(t) = e^{\lambda(M_{X_1}(t)-1)}$, όπου το $M_{X_1}(t)$ έχει υπολογιστεί στο ερώτημα (α).

4. Θέλουμε να δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $\lim_{n\to\infty} P(|X_n| > \varepsilon) = 0$.
Για δεδομένο $\varepsilon > 0$, έχουμε

$$P(|X_n| > \varepsilon) = P(X_n > \varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{\infty} f_n(x)\, dx = ... = e^{-n\varepsilon} \to 0$$

για $n \to \infty$.
Εναλλακτικά, με χρήση της ανισότητας Markov (η X_n παίρνει μη αρνητικές τιμές, οπότε η ανισότητα μπορεί να εφαρμοστεί)

$$P(X_n > \varepsilon) \le \frac{E(X_n)}{\varepsilon} = \frac{1}{n\varepsilon} \to 0$$

για $n \to \infty$.

5. Έστω $t \in \mathbb{R}$. Για $n > e^{-t}$ έχουμε

$$F_{Z_n}(t) := P(Z_n \le t) = P(\max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \le t + \log n) = P(X_1 \le t + \log n, \dots, X_n \le t + \log n)$$
$$= P(X_1 \le t + \log n)^n = (1 - e^{-t-\log n})^n = \left(1 - \frac{e^{-t}}{n}\right)^n.$$

Στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιούμε το ότι οι X_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες. Στην τέταρτη ισότητα το ότι $t + \log n > 0$ και το ότι η X_1 ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο 1.
Άρα $\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(t) = e^{-e^{-t}} = F_Z(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

[2] Αυτό είναι κάτι γνωστό από την θεωρία. Η πιθανογεννήτρια της Poisson.