Πιθανότητες ΙΙ. Ασκήσεις 3

Ροπογεννητριες, πιθανογεννητριες, χαρακτηριστικες συναρτησεις
Νομος μεγαλων αριθμων, Κεντρικο οριακο θεωρημα

1. Έστω X τυχαία μεταβλητή και η ροπογεννήτρια της $M_X(t) = E(e^{tX})$ για $t \in \mathbb{R}$.
(α) Αν για κάποιο $\varepsilon > 0$ έχουμε ότι $M_X(\varepsilon) < \infty$ τότε $E(X^+) < \infty$.

(β) Αν για κάποιο $\varepsilon > 0$ έχουμε ότι $M_X(-\varepsilon) < \infty$ τότε $E(X^-) < \infty$.

(γ) Για την κατανομή Cauchy ισχύει

$$M_X(t) = \begin{cases} 1 & \text{για } t = 0, \\ \infty & \text{για } t \neq 0. \end{cases}$$

Δηλαδή η ροπογεννήτρια της X είναι πεπερασμένη μόνο για $t = 0$.

2. (α) Αν για κάποιο $a > 0$ ισχύει $P(X > a) > 0$, τότε

$$\lim_{t \to \infty} M_X(t) = \infty.$$

(β) Αν για κάποιο $a > 0$ ισχύει $P(X < -a) > 0$, τότε

$$\lim_{t \to -\infty} M_X(t) = \infty.$$

(γ)* Να δειχθεί το συμπέρασμα του (α) με την υπόθεση $P(X > 0) > 0$.

3. (α) Έστω X συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα $f(x) = x^{-2}\,\mathbf{1}_{x \geq 1}$. Για ποιά $t \in \mathbb{R}$ είναι η ροπογεννήτρια $M_X(t) = E(e^{tX})$ πεπερασμένη;

(β) Να κατασκευαστεί τυχαία μεταβλητή X ώστε $M_X(t) = \infty$ κάθε για $t \neq 0$.

4. Έστω X τυχαία μεταβλητή ώστε $M_X(5) < \infty$. Να δειχθεί ότι υπάρχει $C > 0$ σταθερά ώστε για κάθε $t \in \mathbb{R}$ να ισχύει

$$P(X > t) \leq Ce^{-5t}.$$

Δηλαδή η "ουρά" της X προς τα δεξιά φθίνει γρήγορα, τουλάχιστον με ταχύτητα e^{-5t}.

Υπόδειξη: Η ανισότητα Markov λέει ότι για τυχαία μεταβλητή Y με μη αρνητικές τιμές και $r > 0$, ισχύει $P(Y > r) \leq E(Y)/r$.

5. Έστω τυχαία μεταβλητή X με πυκνότητα

$$f(x) = \begin{cases} c\frac{1}{x^{1+a}}, & \text{για } x \geq 1, \\ 0 & \text{για } x < 1. \end{cases}$$

όπου $a \in \mathbb{R}$.

(α) Ποιές είναι οι επιτρεπτές τιμές του a, και ποιά η τιμή της σταθεράς c;

(β) Να προσδιοριστεί το σύνολο $\{t \in \mathbb{R} : M_X(t) < \infty\}$, όπου M_X είναι η ροπογενήτρια της X.

(γ) Ποιές ροπές $E(X^r)$ (με $r \in \mathbb{N}$) της X είναι πεπερασμένες;

6. Έστω M_X η ροπογενήτρια μιας τυχαίας μεταβλητής X.

(α)* Να δειχθεί ότι η $\log M_X$ είναι κυρτή συνάρτηση. Δηλαδή

$$\log M_X(rx + (1-r)y) \leq r \log M_X(x) + (1-r) \log M_X(y)$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, $r \in [0,1]$.

Υπόδειξη: Η ανισότητα Holder (γενίκευση της Cauchy-Schwarz) λέει ότι για τυχαίες μεταβλητές X, Y και $p, q > 1$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ισχύει

$$E(|XY|) \leq \left\{E(|X|^{1/p})\right\}^p \left\{E(|Y|^{1/q})\right\}^q.$$

(β) Να δειχθεί ότι το σύνολο $\{t \in \mathbb{R} : M_X(t) < \infty\}$ είναι κυρτό, και άρα είναι ένα υποδιάστημα του $\mathbb{R}$. Ξέρουμε επίσης ότι περιέχει το 0 πάντοτε.

7. Έστω X τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα

$$f(x) := \begin{cases} |x| & \text{αν } |x| < 1, \\ 0 & \text{αν } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Ποιά είναι η ροπογεννήτρια M_X της X;

8. Ποιά από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι ροπογεννήτρια καποιας τυχαίας μεταβλητής; Χρησιμοποιήστε τον πίνακα ροπογεννητριών γνωστών κατανομών και ιδιότητες των ροπογεννητριών.

$$(a)\ \frac{4}{2-t}\,\mathbf{1}_{t<2} + \infty\mathbf{1}_{t\geq 2}, \quad (b)\ \left(\frac{3}{3-t}\right)^{3/5}\mathbf{1}_{t<3} + \infty\mathbf{1}_{t\geq 3}, \ (c)\quad \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,e^{-5t^2}\mathbf{1}_{t<1} + \infty\mathbf{1}_{t\geq 1},$$

$$(d)\ e^{\sqrt{t}}, \qquad (e)\ e^{3\left(\frac{e^{2t}-1}{2t}-1\right)}, \qquad (f)\ \cos t.$$

9. (α) Για τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί την κατανομή $N(0,\sigma^2)$, να υπολογιστούν, με χρήση της ροπογεννήτριας της X, οι ροπές $\mu_r' := E(X^r)$ για κάθε ακέραιο $r \geq 0$.

(β) Για τυχαία μεταβλητή Y που ακολουθεί την κατανομή $\Gamma(a,\lambda)$ να υπολογιστούν, με χρήση της ροπογεννήτριας της Y, οι ροπές $\mu_r' := E(Y^r)$ για κάθε ακέραιο $r \geq 0$.

10. Έστω $n \geq 1$ φυσικός αριθμός, και δύο τυχαίες μεταβλητές X, R (σε κοινό χώρο πιθανότητας) ώστε η R να ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,1)$, ενώ για την X ξέρουμε ότι η δεσμευμένη κατανομή $X \mid R = r$ είναι διωνυμική με παράμετρους n, r για κάθε $r \in (0,1)$.

(α) Να υπολογιστεί η ροπογεννήτρια της X.

(β) Με χρήση του (α) να βρεθεί η κατανομή της X.

11. Υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ ώστε μία από τις συναρτήσεις

$$g(t) := \frac{at-1}{3-t^3}, \ f(t) := \frac{5t^2+a}{7-t^5},$$

(περιορισμένη σε ένα διάστημα γύρω από το 0) να είναι η πιθανογεννήτρια P_X κάποιας τυχαίας μεταβλητής X; Για αυτή την τιμή του a

(α) Να προσδιοριστεί η κατανομή αυτής της τυχαίας μεταβλητής X.

(β) Να υπολογιστούν με χρήση της P_X η μέση τιμή και η διασπορά της X.

12. (α) Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda > 0$. Να υπολογίσετε την πιθανογεννήτριά της, $P_X(u) = E(u^X)$, και από αυτήν να συνάγετε τις $E(X)$ και $V(X)$. Για ποιά u είναι πεπερασμένη;

(β) Έστω θετικές σταθερές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ και $\{X_i : 1 \le i \le n\}$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$. Να δειχθεί ότι

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim \text{Poisson}(\lambda)$$

με $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

13. (α) Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή $\Gamma(a, \lambda)$ (όπου $a, \lambda > 0$), δηλαδή την κατανομή με πυκνότητα

$$f(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x>0}.$$

Να υπολογίσετε την ροπογεννήτριά της, $M_X(t) = E(e^{tX})$. Για ποιά t είναι η M_X πεπερασμένη; Χρησιμοποιώντας την, υπολογίστε τις $E(X)$ και $V(X)$.

(β) Έστω θετικές σταθερές $a_1, a_2, \ldots, a_n, \lambda$ και $\{X_i : 1 \le i \le n\}$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $X_i \sim \Gamma(a_i, \lambda)$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$ (δηλαδή με κοινή δεύτερη παράμετρο λ). Να δειχθεί ότι

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim \Gamma(a, \lambda)$$

με $a = \sum_{i=1}^n a_i$.

(γ) Να δείξετε ότι όταν οι τυχαίες μεταβλητές X_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες Εκθετικές με (κοινή) παράμετρο $\theta > 0$ τότε ο δειγματικός τους μέσος $\overline{X} = (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)/n$ ακολουθεί κατανομή $\Gamma(a_n, \lambda_n)$ με κατάλληλες σταθερές a_n και λ_n, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

14. (α) Έστω ότι $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, Υπολογίστε την ροπογεννήτριά της, $M_X(t) = E(e^{tX})$. Για ποιά t είναι πεπερασμένη; Συνάγετε απο αυτήν τις ροπές $E(X^k)$ για $k = 1, 2, 3$.

(β) Να δείξετε ότι όταν οι τυχαίες μεταβλητές $\{X_i : 1 \le i \le n\}$ είναι ανεξάρτητες και $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, τότε το άθροισμά τους ακολουθεί την κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ όπου $\mu = \sum_{i=1}^n \mu_i$ και $\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$.

(γ) Γενικότερα, να δείξετε ότι όταν οι $\{X_i : 1 \le i \le n\}$ είναι όπως στο ερώτημα (β), τότε για οποιεσδήποτε σταθερές c_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, με $\sum_{i=1}^n |c_i| > 0$, η τυχαία μεταβλητή $X = c_0 + \sum_{i=1}^n c_i X_i$ ακολουθεί την κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ όπου $\mu = c_0 + \sum_{i=1}^n c_i \mu_i$ και $\sigma^2 = \sum_{i=1}^n c_i^2 \sigma_i^2$.

(δ) Ποια είναι η κατανομή του δειγματικού μέσου $\overline{X} = (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)/n$ όταν οι τυχαίες μεταβλητές X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες κανονικές $N(\mu, \sigma^2)$, και ποια είναι η κατανομή του τυποποιημένου δειγματικού μέσου $Z_n = \sqrt{n}(\overline{X} - \mu)/\sigma$;

Συγκλιση τυχαιων μεταβλητων

15. Έστω X τυχαία μεταβλητή (με τιμές στο $\mathbb{R}$). Για $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή $X_n := \mathbf{1}_{X>n}$, δηλαδή

$$X_n(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{αν } X(\omega) > n, \\ 0 & \text{αν } X(\omega) \le n. \end{cases}$$

(α) Να δειχθεί ότι $X_n \to 0$ κατά πιθανότητα.

(β) Να δειχθεί ότι $X_n \to 0$ με πιθανότητα ένα.

16.(Η σύγκλιση κατά πιθανότητα είναι ασθενέστερη από την σύγκλιση με πιθανότητα 1. Ένα βασικό αντιπαράδειγμα)

Έστω $(Y_n)_{n\geq 2}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών στον ίδιο χώρο πιθανότητας ώστε η Y_n να είναι διακριτή ομοιόμορφη στο $\{2^{n-1}+1, 2^{n-1}+2, \ldots, 2^n\}$ (μπορούμε μάλιστα να τις έχουμε και ανεξάρτητες). Για $i \in \mathbb{N}$, θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή

$$X_i := \begin{cases} 1 \text{ αν } i \in \{Y_2, Y_3, \ldots\}, \\ 0 \text{ αν } i \in \mathbb{N} \setminus \{Y_2, Y_3, \ldots\}. \end{cases}$$

Να δειχθεί ότι

(α) $X_n \to 0$ κατά πιθανότητα.

(β) $P(\lim_{n\to\infty} X_n = 0) = 0$, και μάλιστα $P(\lim_{n\to\infty} X_n \text{ υπάρχει}) = 0$. Δηλαδή το σύνολο των $\omega \in \Omega$ για τα οποία η ακολουθία των αριθμών $(X_n(\omega))_{n\geq 2}$ δεν συγκλίνει έχει πιθανότητα 1. Εδώ κάθε ω αντιστοιχεί σε μία πραγματοποίηση των $Y_2, Y_3, \ldots$.

17. Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών καθεμία με την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,1)$. Για κάθε $n \geq 1$ θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές

$$m_n = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\},$$
$$M_n = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}.$$

Να δειχθεί ότι $m_n \to 0$ και $M_n \to 1$ κατά πιθανότητα καθώς $n \to \infty$.

18. Έστω $(X_i)_{i\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών (στον ίδιο χώρο πιθανότητας), καθεμία με κατανομή $N(2,1)$. Θέτουμε $S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ για κάθε $n \geq 1$. Να υπολογιστούν τα όρια

(α) $\lim_{n\to\infty} P(S_n > 2.1n)$,

(β) $\lim_{n\to\infty} P(S_n > 2n + \sqrt{n})$,

(γ) $\lim_{n\to\infty} P(S_n > 10\sqrt{n})$,

(δ) $\lim_{n\to\infty} P(S_n < 3n)$,

(ε) $\lim_{n\to\infty} P(S_n > 10^{10})$.

19. Έστω $(U_i)_{i\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών (στον ίδιο χώρο πιθανότητας), καθεμία με κατανομή $U(0,1)$, δηλαδή ομοιόμορφη στο $(0,1)$. Να δειχθεί ότι

(α) $\lim_{n\to\infty}(U_1U_2\cdots U_n)^{1/n} = e^{-1}$ με πιθανότητα 1.

(β) $\lim_{n\to\infty} U_1U_2\cdots U_n = 0$ με πιθανότητα 1.

(γ) $\lim_{n\to\infty} \frac{U_1^a+\cdots+U_n^a}{n} = \begin{cases} \frac{1}{1+a} & \text{με πιθανότητα 1 αν } a > -1, \\ \infty & \text{με πιθανότητα 1 αν } a \leq -1. \end{cases}$

20. Έστω $(X_i)_{i\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών (στον ίδιο χώρο πιθανότητας), με $\mu = E(X_1) \in \mathbb{R}$ και $\sigma^2 = V(X_1) < \infty$. Να δειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \mu)^2 = \sigma^2 \text{ με πιθανότητα } 1.$$

Ένα χρήσιμο όριο. Αν $(c_n)_{n\geq 1}$ είναι μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών με $\lim_{n\to\infty} nc_n = a \in \mathbb{C}$ (και άρα $c_n \to 0$), τότε

$$\lim_{n\to\infty} (1 + c_n)^n = e^a.$$

21. (α) Έστω X τυχαία μεταβλητή με κατανομή εκθετική με παράμετρο $a > 0$. Να υπολογιστεί η χαρακτηριστική συνάρτηση της X.

(β) Έστω Y τυχαία μεταβλητή με κατανομή γεωμετρική με παράμετρο $p \in (0, 1]$. Δηλαδή $P(Y = k) = p\,(1-p)^{k-1}$ για $k = 1, 2, \ldots$. Να υπολογιστεί η χαρακτηριστική συνάρτηση της Y.

(γ) Έστω $a > 0$, και $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών ώστε η X_n να ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $p_n = a/n$. Να δειχθεί ότι η ακολουθία $(X_n/n)_{n\geq 1}$ συγκλίνει κατά κατανομή στην τυχαία μεταβλητή X του ερωτήματος (α), χρησιμοποιώντας

(i) τον ορισμό της σύγκλισης κατά κατανομή,

(ii) χαρακτηριστικές συναρτήσεις.

22. (α) Έστω X τυχαία μεταβλητή με κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda > 0$. Να υπολογιστεί η χαρακτηριστική συνάρτηση της X.

(β) Έστω Y τυχαία μεταβλητή με κατανομή διωνυμική με παραμέτρους $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, p \in [0, 1]$. Να υπολογιστεί η χαρακτηριστική συνάρτηση της Y.

(γ) Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών ώστε η X_n να ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτους $n, p_n \in (0, 1)$. Αν $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda$, να δειχθεί ότι η ακολουθία $(X_n)_{n\geq 1}$ συγκλίνει κατά κατανομή στην τυχαία μεταβλητή X του ερωτήματος (α).

23. Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $\mathrm{Var}(X_1) = 1$. Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left| \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - (X_{n+1} + \cdots + X_{2n})}{\sqrt{n}} \right| \leq 1 \right).$$

24. Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών που συγκλίνει κατά κατανομή σε μία τυχαία μεταβλητή X. Για καθένα από τα ακόλουθα ζεύγη κατανομής για την X και συνόλου $A \subset \mathbb{R}$, συνεπάγεται η σύγκλιση κατά κατανομή $X_n \Rightarrow X$ την

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n \in A) = P(X \in A)?$$

	Κατανομή της X	ΣύνολοA
(i)	$Poisson(2)$,	$(2, 32.1) \cup \{100\}$
(ii)	$Poisson(2)$,	$\mathbb{Q}$
(iii)	Γεωμετρική$(1/3)$,	$(-1.5, 2.8)$
(iv)	$N(0, 1)$	$(-2, \pi)$
(v)	$U(0, 1)$	$(0, 1/3) \setminus \mathbb{Q}$
(vi)	Bernouli$(2/5)$ στο $\{0, 1\}$	$(0, 1/2) \cup (2, 4)$

Απλες ασκησεις στο κεντρικο οριακο θεωρημα

25. Τα αιτήματα που φτάνουν σε έναν server έχουν το καθένα τυχαίο χρόνο εξυπηρέτησης που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\theta = 1/2$ (δηλαδή πυκνότητα $(1/2)e^{-x/2}\mathbf{1}_{x>0}$, το x σε λεπτά). Ο server μπορεί να απασχολείται με μόνο ένα αίτημα σε κάθε δεδομένη στιγμή. Ποιά είναι προσεγγιστικά η πιθανότητα να εξυπηρετήσει τα πρώτα 100 αιτήματα μιας δεδομένης μέρας σε συνολικό χρόνο το πολύ 220 λεπτά; Δίνονται Φ(1)=0.8413, Φ(1.5)=0.9332, Φ(2)=0.9773.

26. Θεωρούμε μία ακολουθία ρίψεων ενός αμερόληπτου ζαριού. Για j θετικό ακέραιο θέτουμε $X_j = 1$ αν το αποτέλεσμα της j δοκιμής είναι 5 ή 6 και $X_j = 0$ διαφορετικά.

(α) Να υπολογισθεί η μέση τιμή και η διασπορά της X_1.

(β) Έστω ο αριθμός των αποτελεσμάτων 5 ή 6 στις πρώτες 1800 ρίψεις. Να υπολογισθεί κατά προσέγγιση η πιθανότητα $P(580 < T < 640)$. [Δίνονται $\Phi(1) = 0.8413$, $\Phi(1.5) = 0.9332$, $\Phi(2) = 0.9773$.]

27. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_{80}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές καθεμία με διακριτή ομοιόμορφη κατανομή στο $\{1, 2, 3, 4\}$. Να βρεθεί προσεγγιστικά η πιθανότητα το άθροισμά τους να βρίσκεται στο διάστημα $[190, 220]$. [Δίνονται $\Phi(1) = 0.8413$, $\Phi(1.5) = 0.9332$, $\Phi(2) = 0.9773$.]

28. Υπολογίστε κατά προσέγγιση την πιθανότητα όπως σε 100 ανεξάρτητες ρίψεις ενός νομίσματος εμφανιστούν το πολύ 40 επιτυχίες. [Δίνονται $\Phi(1) = 0.841$, $\Phi(1.5) = 0.933$, $\Phi(2) = 0.977$.]

29. Ο αριθμός τυπογραφικών λαθών μίας σελίδας μίας συγκεκριμένης εφημερίδας ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέση τιμή $\lambda = 0.7$. Αν η εφημερίδα έχει 64 σελίδες, ποια είναι κατά προσέγγιση η πιθανότητα όπως το πολύ 36 σελίδες δεν έχουν καθόλου λάθη? [Δίνονται $e^{-0.7} \simeq 1/2$, $\Phi(1) = 0.8413$, $\Phi(2) = 0.9773$, $\Phi(3) = 0.9987$.]

30. Το σφάλμα μέτρησης ενός οργάνου ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[-0.05, 0.05]$. Ποια είναι κατά προσέγγιση η πιθανότητα το σφάλμα μέτρησης για το άθροισμα 300 μετρήσεων να είναι κατ΄ απόλυτη τιμή μικρότερο του 0.25; [Δίνονται $\Phi(0.5) = 0.6915$, $\Phi(0.8) = 0.7881$, $\Phi(1) = 0.8413$.]

31. Δυό ομάδες φοιτητών A και B με 200 μέλη η καθεμία πρόκειται να γράψουν μία εξέταση. Οι επιδόσεις τους είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, και ξέρουμε ότι αυτές των φοιτητών της ομάδας A ακολουθούν κοινή κατανομή με μεση τιμή 9 και διασπορά 1/6, ενώ για την ομάδα B η μέση τιμή είναι 8.5 και η διασπορά είναι 1/3. Έστω M_A, M_B οι μέσοι όροι των δύο ομάδων. Να βρεθεί η πιθανότητα να έχουμε $M_A - M_B \in [0.5, 0.65]$. Δίνονται $\Phi(1) = 0.8413$, $\Phi(2) = 0.9773$, $\Phi(3) = 0.9987$.

[Προσοχή. Η εξέταση δεν έχει συμβεί ακόμα. Οι επιδόσεις των φοιτητών καθώς και τα M_A, M_B είναι τυχαίες μεταβλητές. Μετά την εξέταση, θα πάρουν συγκεκριμένες τιμές, και δεν θα υπάρχει καμία αβεβαιότητα/τυχαιότητα. Το πιο πάνω ερώτημα για το $M_A - M_B$ το κάνουμε πριν γίνει η εξέταση.]

Απαντήσεις

1. (α) $0 \le \varepsilon X^+ \le e^{\varepsilon X}$.

(γ) Προκύπτει από τα (α), (β) γιατί η Cauchy έχει $E(X^+) = E(X^-) = \infty$. Είναι επίσης εύκολο να το δει κανείς και απευθείας.

2. (α) $e^{tX} \ge e^{ta}\mathbf{1}_{X>a}$. Άρα $M_X(t) \ge E(e^{ta}1_{X>a}) = e^{ta}E(1_{X>a}) = e^{ta}P(X > a) \to \infty$ για $t \to \infty$ αφού $a > 0, P(X > a) > 0$.

(γ) $\{X > 0\} = \cup_{n=1}^{\infty}\{X > 1/n\}$, και αφού η ακολουθία των ενδεχομένων $(\{X > 1/n\})_{n\ge1}$ είναι αύξουσα, έχουμε

$$P(X > 0) = \lim_{n\to\infty} P(X > 1/n).$$

Άρα υπάρχει $n \ge 1$ με $P(X > 1/n) > 0$. Έπειτα εφαρμόζουμε το ερώτημα (α).

3. (α) Είναι πεπερασμένη μόνο για $t \le 0$. Γιατί

$$M_X(t) = \int_1^{\infty} e^{tx}\frac{1}{x^2}\,dx,$$

και όταν $t > 0$, η συνάρτηση που ολοκληρώνουμε ικανοποιεί $\lim_{x\to\infty} x^{-2}e^{tx} = \infty$. Άρα το γενικευμένο ολοκλήρωμα ισούται με ∞. Για $t \le 0$ έχουμε $M_X(t) \le M_X(0) = 1 < \infty$.

(β) Θεωρούμε την X με πυκνότητα

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & \text{αν } |x| \ge 1 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Ανάλογα επιχειρήματα όπως στο (α) αποδεικνύουν το ζητούμενο.

4.

$$P(X > t) = P(e^{5X} > e^{5t}) \le e^{-5t}E(e^{5X}) = e^{-5t}M_X(5).$$

Χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Markov. Τέλος, θέτουμε $C = M_X(5) < \infty$, η οποία είναι μια θετική και πεπερασμένη σταθερά.

5. (α) Πρέπει $a > 0$ ώστε $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx < \infty$. Η απαίτηση $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$ δίνει $c = a$.

(β) $\{t \in \mathbb{R} : M_X(t) < \infty\} = (-\infty, 0]$.

(γ) Πεπερασμένες είναι όλες οι ροπές με $E(X^r)$ με $r \in \mathbb{N}$ και $r < a$.

6. (α) Για $r = 0$ ή 1, η ανισότητα είναι προφανής. Για $r \in (0, 1)$, εφαρμόζουμε την ανισότητα Hölder για $p = 1/r, q = 1/(1-r)$.

$$M_X(rx + (1-r)y) = E(e^{rxX}e^{(1-r)yX}) \le E(e^{xX})^r E(e^{yX})^{1-r} = M_X(x)^r M_X(y)^{1-r}.$$

7. Για $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-1}^{1} |x|e^{tx}\,dx = -\int_{-1}^{0} xe^{tx}\,dx + \int_0^1 xe^{tx}\,dx = ...$$
$$= \frac{2 - (e^t + e^{-t}) + t(e^t - e^{-t})}{t^2},$$

ενώ $M_X(0) = 1$.

8. Ροπογεννήτριες είναι οι $(b), (c), (e)$. Για την (d) χρησιμοποιούμε την Άσκηση 6 πιο πάνω.

9. Η ροπογεννήτρια της X ισούται με $M_X(t) = e^{\sigma^2 t^2/2}$, πεπερασμένη σε όλο το $\mathbb{R}$ (ιδιαίτερα σε μία περιοχή του 0). Άρα όλες οι ροπές μ'_r είναι πεπερασμένες και

$$M_X(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\mu'_r}{r!} t^r.$$

Από την άλλη, αναλύοντας την $e^{\sigma^2 t^2/2}$ σε δυναμοσειρά με κέντρο το 0, έχουμε

$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\sigma^2 t^2}{2} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma^{2n}}{n! 2^n} t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)! \sigma^{2n}}{n! 2^n} \frac{1}{(2n)!} t^{2n}.$$

Άρα

$$\mu'_r := \begin{cases} 0 & \text{αν } r \in \mathbb{N} \text{ περιττός,} \\ \frac{(2n)!\sigma^{2n}}{n!2^n} = 1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1) \times \sigma^{2n} & \text{αν } r = 2n \text{ με } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

10. Έχουμε$E(e^{tX}) = E(E(e^{tX} \mid R)) = E(m(R))$ με

$$m(r) := E(e^{tX} \mid R = r) = (re^t + 1 - r)^n$$

για κάθε $r \in [0, 1]$. Άρα

$$E(m(R)) = \int_0^1 (re^t + 1 - r)^n \, dr = \ldots = \frac{1}{n+1} \frac{e^{(n+1)t} - 1}{e^t - 1} = \frac{1}{n+1} \left(1 + e^t + e^{2t} + \cdots + e^{nt} \right).$$

Αλλά η τελευταία έκφραση είναι η ροπογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής Y με $P(Y = k) = 1/(n+1)$ για $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Από το θεώρημα μοναδικότητας για ροπογεννήτριες, έπεται ότι η X έχει την ίδια κατανομή με την Y.

11. Αναπτύσοντας την g σε δυναμοσειρά με κέντρο το 0, βρίσκουμε ότι οι συντελεστές των όρων t^{3n} με $n \geq 1$ είναι αρνητικοί, άρα δεν είναι δυνατόν να είναι πιθανογεννήτρια.

Για να είναι η f πιθανογεννήτρια, αναγκαία συνθήκη είναι η $f(1) = 1$, απ΄ όπου βρίσκουμε $a = 1$. Για αυτή την τιμή του a και για t κοντά στο 0 (μάλιστα $t^2/7 < 1$ είναι αρκετό), υπολογίζουμε

$$f(t) = \frac{1}{7}(5t^2 + 1) \frac{1}{1 - \frac{t^5}{7}} = \frac{1}{7}(5t^2 + 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{5n}}{7^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{7^{n+1}} t^{5n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{7^{n+1}} t^{5n+2},$$

η οποία είναι μια δυναμοσειρά με μη αρνητικούς συντελεστές (οι οποίοι αθροίζουν στο 1 λόγω της $f(1) = 1$). Άρα για $a = 1$, η f είναι πιθανογεννήτρια.

(α) Η κατανομή της X προσδιορίζεται από την συνάρτηση πιθανότητάς της ως εξής.

$$P(X = k) = \begin{cases} 1/7^{n+1} & \text{αν } k = 5n \text{ με } n \in \mathbb{N}, \\ 5/7^{n+1} & \text{αν } k = 5n + 2 \text{ με } n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

(β) Κατά τα γνωστά, $E(X) = P_X'(1-) = 5/2$ και $E(X(X-1)) = P_X''(1-) = 55/6$. Άρα $\mathrm{V}(X) = E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2 = 65/12$.

12. (α) Για κάθε $u \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$P_X(u) = E(u^X) = \sum_{k=0}^{\infty} u^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda u)^k}{k!} = e^{\lambda(u-1)}.$$

Η πιθανογεννήτρια είναι πεπερασμένη για κάθε $u \in \mathbb{R}$. Επομένως, παραγωγίζοντας ως προς u όρο προς όρο την δυναμοσειρά δύο φορές, παίρνουμε για κάθε $u \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} P_X'(u) &= E(Xu^{X-1}) = \lambda e^{\lambda(u-1)}, \\ P_X''(u) &= E(X(X-1)u^{X-2}) = \lambda^2 e^{\lambda(u-1)}. \end{aligned}$$

Για $u = 1$, οι δύο αυτές σχέσεις δίνουν $E(X) = \lambda, E(X(X-1)) = \lambda^2$. Άρα $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$ και $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \lambda$.

Σχόλιο: Χρησιμοποιούμε από τον Απειροστικό II ότι αν μια δυναμοσειρά έχει ακτίνα σύγλισης $R > 0$ τότε η παράγωγος της στο $(-R, R)$ προκύπτει με παραγώγιση όρο προς όρο.

(β) Η πιθανογεννήτρια του αθροίσματος σε κάθε $u \in \mathbb{R}$ ισούται με

$$\begin{aligned} P_{X_1+\cdots+X_n}(u) &= E(u^{X_1+\cdots+X_n}) = E(u^{X_1}) \cdots E(u^{X_n}) = e^{\lambda_1(u-1)} \cdots e^{\lambda_n(u-1)} \\ &= e^{\lambda(u-1)}. \end{aligned}$$

Η τελευταία είναι η πιθανογεννήτρια της Poisson(λ). Ξέρουμε (πάλι από Απειροστικό II) ότι αν δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y παίρνουν τιμές στο $\mathbb{N}$ και οι πιθανογεννήτριες τους, P_X, P_Y, συμφωνούν σε μια περιοχή του 0 (δηλαδή $P_X(u) = P_Y(u)$ για $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ για κάποιο $\varepsilon > 0$), τότε έχουν την ίδια κατανομή. Άρα

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim \text{Poisson}(\lambda)$$

με $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

13. (α) Για $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$M_X(t) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{tx} x^{a-1} e^{-\lambda x}\, dx = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x(\lambda-t)}\, dx.$$

Προκύπτει απο την τελευταία έκφραση ότι $M(t) = \infty$ ακριβώς για $t \geq \lambda$. Ενώ για $t < \lambda$ έχουμε

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x(\lambda-t)}\, dx \overset{y=x(\lambda-t)}{=} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{(\lambda-t)^{a-1}} e^{-y} \frac{1}{\lambda-t}\, dy \\ &= \frac{\lambda^a}{(\lambda-t)^a} = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-a}. \end{aligned}$$

Επειδή η M_X είναι πεπερασμένη σε περιοχή του 0, μπορούμε να έχουμε σε εκείνη την περιοχή

$$\begin{aligned} E(Xe^{tX}) &= M_X'(t) = a\lambda^{-1}(1 - t\lambda^{-1})^{-a-1}, \\ E(X^2 e^{tX}) &= M_X''(t) = a(a+1)\lambda^{-2}(1 - t\lambda^{-1})^{-a-2}. \end{aligned}$$

Θέτοντας $t = 0$ παίρνουμε $E(X) = a\lambda^{-1}, E(X^2) = a(a+1)\lambda^{-2}$. Άρα $V(X) = a\lambda^{-2}$.

(β) Η ροπογεννήτρια του αθροίσματος σε κάθε $t \in \mathbb{R}$ ισούται με

$$M_{X_1+\cdots+X_n}(t) = E(e^{t(X_1+\cdots+X_n)}) = E(e^{tX_1})\cdots E(e^{tX_n})$$

λόγω ανεξαρτησίας. Από το (α) έχουμε ότι αυτή η ποσότητα είναι πεπερασμένη ακριβώς όταν $t < \lambda$. Και για αυτά τα t έχουμε

$$M_{X_1+\cdots+X_n}(t) = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-a_1}\left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-a_2}\cdots\left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-a_n} = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-a}.$$

Επίσης, η κατανομή $\Gamma(a, \lambda)$ έχει ακριβώς την ίδια ροπογεννήτρια, και αυτή η ταυτότητα των ροπογεννητριών ισχύει σε μια περιοχή του 0. Έπεται από γνωστή πρόταση (Πρόταση 7.1.2, Τόμος 2 του βιβλίου του κ. Κούτρα) ότι η $X_1 + \cdots + X_n$ ακολουθεί την κατανομή $\Gamma(a, \lambda)$.

(γ) Κάθε μία από τις τυχαίες μεταβλητές $X_i/n, i = 1, \ldots, n$ ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $n\theta$ (γιατί για $x \geq 0$ έχουμε $P(X_1/n \geq x) = P(X_1 \geq nx) = e^{-\theta nx}...$), η οποία είναι η $\Gamma(1, n\theta)$. Προκύπτει από το (β) ότι η $\overline{X}$ ακολουθεί την κατανομή $\Gamma(n, n\theta)$.

14. (α) Από την θεωρία, ξέρουμε ότι $M_X(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}$ πεπερασμένη για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Έπειτα, για $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $E(X^k) = M_X^{(k)}(0)$. Άρα

$$\begin{aligned}
M_X'(0) &= e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}(\mu + \sigma^2 t)\big|_{t=0} = \mu \\
M_X''(0) &= e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}(\sigma^2 + (\mu + \sigma^2 t)^2)\big|_{t=0} = \sigma^2 + \mu^2 \\
M_X'''(0) &= e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}(3\sigma^2(\mu + \sigma^2 t) + (\mu + \sigma^2 t)^3)\big|_{t=0} = \mu^3 + 3\mu\sigma^2
\end{aligned}$$

(β) Απόδειξη όπως στην Πρόταση 7.3.4 του βιβλίου (σελ. 290).

(γ) Η Πρόταση 7.3.4 του βιβλίου δίνει ότι η $Y := \sum_{i=1}^n c_i X_i$ ακολουθεί την $N(\sum_{i=1}^n c_i\mu_i, \sum_{i=1}^n c_i^2\sigma_i^2)$. Και τότε προφανώς η $c_0 + Y$ ακολουθεί την $N(c_0 + \sum_{i=1}^n c_i\mu_i, \sum_{i=1}^n c_i^2\sigma_i^2)$ (απόδειξη με τεχνικές από Πιθανότητες Ι ή Ροπογεννήτριες).

(δ) Έπεται από το (γ) ότι $\overline{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$, και από τον τρόπο που μετασχηματίζεται η κατανομή μιας $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ κάτω από μεταφορές και πολλαπλασιασμούς, έπεται ότι $Z_n \sim N(0, 1)$.

15. (α) Θέλουμε για κάθε $\varepsilon > 0$ να δείξουμε ότι $P(|X_n| > \varepsilon) \to 0$. Για $\varepsilon \geq 1$ η προηγούμενη ακολουθία είναι μηδενική, οπότε αρκεί να πάρουμε $\varepsilon \in (0, 1)$. Τότε

$$P(|X_n| > \varepsilon) = P(X_n = 1) = P(X > n).$$

η ακολουθία των συνόλων $(A_n)_{n\geq 1}$ με $A_n = \{X > n\}$ είναι φθίνουσα με τομή το $\emptyset$. Άρα $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\emptyset) = 0$.

(β) Παίρνουμε ένα $\omega \in \Omega$. Τότε ο $X(\omega)$ είναι ένας συγκεκριμένος αριθμός (π.χ. το 34.6), και για $n > X(\omega)$ έχουμε $X_n(\omega) = \mathbf{1}_{X(\omega)>n} = 0$. Άρα $P(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = 0\}) = P(\Omega) = 1$.

16. (α) Έστω $\varepsilon \in (0, 1)$ (αν $\varepsilon \geq 1$, το συμπέρασμα ισχύει τετριμμένα). Για $n \geq 2$, υπάρχει μοναδικός φυσικός r_n ώστε $2^{r_n - 1} < n \leq 2^{r_n}$. Τότε

$$P(|X_n| > \varepsilon) = P(X_n = 1) = P(Y_{r_n} = n) = \frac{1}{2^{r_n}/2} \leq \frac{2}{n} \to 0$$

για $n \to \infty$. Η τρίτη ισότητα ισχύει γιατί η Y_{r_n} είναι διακριτή ομοιόμορφη στο $\{2^{r_n-1}+1, \ldots, 2^{r_n}\}$, το οποίο έχει $2^{r_n}/2$ στοιχεία. Η ανισότητα έπεται από τον ορισμό του r_n.

(β) Για κάθε ω, δηλαδή κάθε πραγματοποίηση των $Y_1, Y_2, \ldots$, υπάρχουν άπειροι δείκτες n ώστε $X_n(\omega) = 1$ και πάλι άπειροι δείκτες m ώστε $X_m(\omega) = 1$ (πιο συγκεκριμένα, μεταξύ δύο διαδοχικών δυνάμεων του 2 υπάρχει ακριβώς ένας n με $X_n(\omega) = 1$). Άρα $P(\underline{\lim}_{n\to\infty} X_n = 0 < 1 = \overline{\lim}_{n\to\infty} X_n) = 1$, και επομένως $P(\lim_{n\to\infty} X_n \text{ υπάρχει }) = 0$.

17. Για $\varepsilon > 0$, χρησιμοποιώντας την ανεξαρτησία των $X_1, X_2, \ldots$, βρίσκουμε

$$P(|m_n| > \varepsilon) = P(m_n > \varepsilon) = P(X_1 > \varepsilon, \ldots, X_n > \varepsilon) = (1-\varepsilon)^n \to 0,$$

και όμοια

$$P(|M_n - 1| > \varepsilon) = P(M_n < 1-\varepsilon) = P(X_1 < 1-\varepsilon, \ldots, X_n < 1-\varepsilon) = (1-\varepsilon)^n \to 0.$$

18. Για την ακολουθία $(S_n)_{n\geq 1}$ έχουμε ότι $S_n/n \to 2$ κατά πιθανότητα (ασθενής νόμος των μεγάλων αριθμών) και

$$\frac{S_n - 2n}{\sqrt{n}} \Rightarrow Z \sim N(0,1)$$

(κεντρικό οριακό θεώρημα).

(α) Η σύγκλιση $S_n/n \to 2$ κατά πιθανότητα δίνει

$$P(S_n > 2.1n) = P\left(\frac{S_n}{n} > 2.1\right) \leq P\left(\left|\frac{S_n}{n} - 2\right| > 0.1\right) \to 0$$

καθώς $n \to \infty$.

(β) Έχουμε

$$P(S_n > 2n + \sqrt{n}) = P\left(\frac{S_n - 2n}{\sqrt{n}} > 1\right) \to P(Z > 1) = 1 - \Phi(1)$$

καθώς $n \to \infty$ λόγω του κεντρικού οριακού θεωρήματος.

(γ) Ξέρουμε ότι $S_n \sim 2n$, άρα το ενδεχόμενο $S_n > 10\sqrt{n}$ είναι πολύ πιθανό. Τυπικά προχωρούμε ως εξής.

$$P(S_n > 10\sqrt{n}) = P\left(\frac{S_n}{n} > \frac{10}{\sqrt{n}}\right) = 1 - P\left(\frac{S_n}{n} \leq \frac{10}{\sqrt{n}}\right).$$

Για $n > 100$,

$$P\left(\frac{S_n}{n} \leq \frac{10}{\sqrt{n}}\right) \leq P\left(\left|\frac{S_n}{n} - 2\right| > 1\right) \to 0$$

Άρα $\lim_{n\to\infty} P(S_n > 10\sqrt{n}) = 1$.

(δ)

$$P(S_n \geq 3n) = P\left(\frac{S_n}{n} \geq 3\right) \leq P\left(\left|\frac{S_n}{n} - 2\right| > \frac{1}{2}\right) \to 0$$

καθώς $n \to \infty$. Άρα $\lim_{n\to\infty} P(S_n < 3n) = 1$.

(ε) Για $n > 10^{10}$ έχουμε

$$P(S_n \leq 10^{10}) = P\left(\frac{S_n}{n} \leq \frac{10^{10}}{n}\right) \leq P\left(\left|\frac{S_n}{n} - 2\right| > \frac{1}{2}\right) \to 0$$

καθώς $n \to \infty$. Άρα $\lim_{n\to\infty} P(S_n > 10^{10}) = 1$.

19. (α) $(U_1U_2\cdots U_n)^{1/n} = e^{\frac{1}{n}(\log U_1+\cdots+\log U_n)}$ Επειδή $E(\log U_1) = \int_0^1 \log x\,dx = \ldots = -1$, ο ισχυρός νόμος των μεγάλων αριθμών για την ακολουθία $(\log U_i)_{i\geq 1}$ δίνει ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log U_1+\cdots+\log U_n}{n} = -1 \text{ με πιθανότητα } 1.$$

Το συμπέρασμα έπεται.

(β) Έπεται από το (α). Επιλέγουμε θ ώστε $e^{-1}<\theta<1$. Με πιθανότητα 1, υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε για $n>n_0$ να ισχύει $(U_1U_2\cdots U_n)^{1/n}<\theta$. Άρα για $n>n_0$

$$0<U_1U_2\cdots U_n<\theta^n\to 0$$

καθώς $n\to\infty$ επειδή $0<\theta<1$.

(γ) Η ακολουθία $(U_i^a)_{i\geq 1}$ αποτελείται από ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, καθεμία με μέση τιμή

$$E(U_1^a) = \int_0^1 x^a\,dx = \begin{cases} \frac{1}{1+a} & \text{αν } a>-1, \\ \infty & \text{αν } a\leq -1. \end{cases}$$

Το συμπέρασμα έπεται από τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών.

20. Οι όροι της ακολουθίας $((X_i-\mu)^2)_{i\geq 1}$ είναι ανεξάρτητες ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, καθεμία με μέση τιμή $E((X_1-\mu)^2)=V(X_1)=\sigma^2$. Ο ισχυρός νόμος των μεγάλων αριθμών δίνει το συμπέρασμα.

21. (α) Για $t\in\mathbb{R}$ έχουμε

$$\phi_X(t) = E(e^{itX}) = a\int_0^\infty e^{itx}e^{-ax}\,dx = a\int_0^\infty e^{-(a-it)x}\,dx = \frac{a}{a-it}[-e^{-(a-it)x}]\Big|_{x=0}^{x=\infty} = \frac{a}{a-it}.$$

Χρησιμοποιήσαμε το ότι $\lim_{x\to\infty} e^{-(a-it)x} = \lim_{x\to\infty} e^{-ax}e^{itx} = 0$ αφού $a>0$ και $|e^{itx}|=1$ φραγμένη συνάρτηση του x.

(β) Για $t\in\mathbb{R}$ έχουμε

$$\phi_X(t) = E(e^{itX}) = \sum_{k=1}^\infty e^{itk}(1-p)^{k-1}p = pe^{it}\sum_{j=0}^\infty (e^{it}(1-p))^j = \frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}.$$

Αθροίσαμε μια γεωμετρική πρόοδο της οποίας ο λόγος έχει μέτρο $|(1-p)e^{it}|=1-p<1$ αφού $p>0$.

(γ) (i) Τα σημεία συνέχειας της συνάρτησης κατανομής F_X της X είναι όλο το $\mathbb{R}$. Έστω $x>0$. Τότε

$$\begin{aligned} F_{X_n/n}(x) &= P\left(\frac{X_n}{n}\leq x\right) = P(X_n\leq [nx]) = 1-P(X_n>[nx]) \\ &= 1-(1-p_n)^{[nx]} = 1-\left(\left(1-\frac{a}{n}\right)^n\right)^{[nx]/n}. \end{aligned}$$

Επειδή $[nx]/n\to x$ και $(1-an^{-1})^n\to e^{-a}$, έπεται ότι $\lim_{n\to\infty} F_{X_n/n}(x) = 1-e^{-ax} = F_X(x)$. Προφανώς το ίδιο ισχύει και για $x\leq 0$.

(ii) Για $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\phi_{X_n/n}(t) = \phi_{X_n}(t/n) = \frac{p_n e^{it/n}}{1-(1-p_n)e^{it/n}} = \frac{e^{it/n}}{\frac{1-e^{it/n}}{a/n} + e^{it/n}} \to \frac{1}{1-\frac{it}{a}} = \phi_X(t)$$

καθώς $n \to \infty$ αφού

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-e^{it/n}}{a/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{it}{a} \frac{1-e^{it/n}}{it/n} = -\frac{it}{a}.$$

Άρα η σύγκλιση $X_n/n \Rightarrow X$ (δηλαδή σύγκλιση κατά κατανομή) έπεται από γνωστό θεώρημα.

22. (α) Για $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\phi_X(t) = E(e^{itX}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{it}\lambda)^k}{k!} = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

(β) Για $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\phi_X(t) = E(e^{itX}) = \sum_{k=0}^{n} e^{itk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pe^{it})^k (1-p)^{n-k} (pe^{it}+1-p)^n.$$

(γ) Για $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\phi_{X_n}(t) = (p_n e^{it} + 1 - p_n)^n = (1 + p_n(e^{it}-1))^n \to e^{\lambda(e^{it}-1)} = \phi_X(t)$$

αφού $\lim_{n\to\infty} p_n(e^{it}-1)n = \lambda(e^{it}-1)$. Άρα η σύγκλιση $X_n \Rightarrow X$ έπεται από γνωστό θεώρημα.

23. Έστω ακολουθία $(Y_n)_{n\geq 1}$ από ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές στον ίδιο χώρο πιθανότητας με τις $\{X_n : n \geq 1\}$ ώστε οι $\{Y_n : n \geq 1\}$ να είναι επίσης ανεξάρτητες από τις $\{X_n : n \geq 1\}$. Τότε επειδή το διάνυσμα $(X_1, \cdots, X_{2n})$ έχει την ίδια κατανομή με το $(X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} &P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n-(X_{n+1}+\cdots+X_{2n})}{\sqrt{n}}\right| \leq 1\right) \\ &\quad = P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n-(Y_1+\cdots+Y_n)}{\sqrt{n}}\right| \leq 1\right) = P\left(\left|\frac{W_1+W_2+\cdots+W_n}{\sqrt{n}}\right| \leq 1\right), \end{aligned}$$

όπου θέσαμε $W_i = X_i - Y_i$ για κάθε $i \geq 1$. Από την υπόθεση, οι $\{W_i : i \geq 1\}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, καθεμία με μέση τιμή $E(W_1) = 0$ και διασπορά $V(W_1) = V(X_1) + V(Y_1) - 2\mathrm{Cov}(X_1, Y_1) = 1 + 1 - 0 = 2$. Άρα, εφαρμόζοντας το κεντρικό οριακό θεώρημα, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{W_1+W_2+\cdots+W_n}{\sqrt{n}}\right| \leq 1\right) &= \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{W_1+W_2+\cdots+W_n}{\sqrt{n2}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= P(|Z| \leq 1/\sqrt{2}) = \Phi(1/\sqrt{2}) - \Phi(1/\sqrt{2}) \\ &= 2\Phi(1/\sqrt{2}) - 1. \end{aligned}$$

24. Η σύγκλιση $X_n \Rightarrow X$ συνεπάγεται την $P(X_n \in A) \to P(X \in A)$ για όλα τα $A \subset \mathbb{R}$ Borel με $P(X \in \partial A) = 0$. Είναι δυνατόν βέβαια η σχέση $P(X_n \in A) \to P(X \in A)$ να ισχύει για ένα σύνολο Borel A συμπτωματικά, ίσως εξαιτίας της φύσης της ακολουθίας $(X_n)_{n\geq 1}$. Πάντως δεν μας την εγγυάται η $X_n \Rightarrow X$.

(i) Όχι. Γιατί $\partial A = \{2, 32.1, 100\}$, στο οποίο η κατανομή της X δίνει θετική πιθανότητα αφού περιέχει τους θετικούς ακέραιους $2, 100$.

(ii) Όχι. Γιατί $\partial A = \bar{A} \setminus A^o = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$, και $P(X \in \mathbb{R}) = 1 > 0$.

(iii) Ναι. Γιατί $\partial A = \{-1.5, 2.8\}$ και $P(X \in \{-1.5, 2.8\}) = 0$, αφού μια γεωμετρική τυχαία μεταβλητή παίρνει μόνο ακέραιες θετικές τιμές.

(iv) Ναι. Γιατί $\partial A = \{-2, \pi\}$ και $P(X \in \partial A) = 0$ αφού η X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή και το ∂A είναι πεπερασμένο.

(v) Όχι. Γιατί $\partial A = \bar{A} \setminus A^o = (0, 1/3) \setminus \emptyset = (0, 1/3)$, και $P(X \in (0, 1/3)) = 1/3 > 0$.

(vi) Όχι. Γιατί $\partial A = \{0, 1/2, 2, 4\}$, και $P(X \in \{0, 1/2, 2, 4\}) = P(X = 0) = 3/5 > 0$.

25. Για $i \geq 1$, έστω X_i ο χρόνος εξυπηρέτησης του i αιτήματος. Απο τις ιδιότητες της εκθετικής κατανομής έχουμε $E(X_1) = 1/\theta = 2, V(X_1) = 1/\theta^2 = 4$. Έστω $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ για κάθε $n \geq 1$. Το κεντρικό οριακό θεώρημα λέει ότι η

$$\frac{S_n - 2n}{\sqrt{4n}}$$

προσεγγιστικά ακολουθεί την κατανομή $N(0, 1)$.
Ζητάμε την πιθανότητα

$$P\left(S_{100} \leq 220\right) = P\left(\frac{S_{100} - 200}{20} \leq 1\right) \approx P(Z \leq 1) = \Phi(1) \approx 0.8413.$$

Στις πιο πάνω ισότητες, η Z είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή $N(0, 1)$, και χρησιμοποιήσαμε το κεντρικό οριακό θεώρημα.

26. (α) Έχουμε $P(X_i = 1) = 1/3, P(X_i = 0) = 2/3$. Δηλαδή, κάθε X_i έχει κατανομή Bernoulli με $p = 1/3$. Άρα $E(X_i) = 1/3, V(X_i) = p(1-p) = 2/9$.

(β) Θέτουμε $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ για κάθε $n \geq 1$. Οι $\{X_i : i \geq 1\}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες. Επίσης $Z = S_{1800}$, και

$$\begin{aligned} P(580 < S_{1800} < 640) &= P\left(-1 < \frac{S_{1800} - 1800\,(1/3)}{\sqrt{1800\,(2/9)}} < 2\right) \approx \Phi(2) - \Phi(-1) \\ &= \Phi(2) + \Phi(1) - 1 \approx 0.8186 \end{aligned}$$

27. Έστω $(X_i)_{i \geq 1}$ μια ακολουθία ανεξάρτητων ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με κατανομή ομοιόμορφη στο $\{1, 2, 3, 4\}$, και $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ για κάθε $n \geq 1$. Οι δύο πρώτες ροπές της X_1 είναι

$$\begin{aligned} E(X_1) &= \frac{1}{4}(1 + 2 + 3 + 4) = \frac{5}{2}, \\ E(X_1^2) &= \frac{1}{4}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) = \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

Άρα η X_1 έχει μέση τιμή $5/2$ και πεπερασμένη διασπορά $\sigma^2 = E(X_1^2) - (E(X_1))^2 = 5/4$. Το κεντρικό οριακό θεώρημα λέει οτι για n μεγάλο, η τυχαία μεταβλητή

$$\frac{S_n - 5n/2}{\sqrt{5/4}\sqrt{n}}$$

ακολουθεί προσεγιστικά την τυπική κανονική κατανομή, $N(0, 1)$.

Για $n = 80$, έχουμε $5n/2 = 200$ και $\sqrt{(5/4)\,n} = 10$, οπότε

$$P(190 \le S_{80} \le 220) = P\left(-1 \le \frac{S_{80}-200}{10} \le 2\right) \approx \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) + \Phi(1) - 1 \approx 0.8186$$

Η προσέγγιση στην δεύτερη ισότητα προκύπτει απο το κεντρικό οριακό θεώρημα.

28. Θέτουμε

$$X_i := \begin{cases} 1 & \text{αν η } i \text{ ρίψη είναι γράμματα,} \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Τότε $X_i \sim \mathrm{Bernoulli}(1/2)$, άρα $\mu := E(X_1) = 1/2, \sigma^2 := V(X_1) = 1/4$. Οι $(X_i)_{i\ge 1}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες. Θέτουμε $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Για n μεγάλο, η $(S_n - n/2)/\sqrt{n/4}$ ακολουθεί προσεγγιστικά την κατανομή $N(0,1)$ (από το κεντρικό οριακό θεώρημα). Άρα

$$P(S_{100} \le 40) = P(S_{100} - 50 \le -10) = P\left(\frac{S_{100}-50}{\sqrt{100/4}} \le -2\right) \approx \Phi(-2) = 1 - \Phi(2)$$

29. Δουλεύουμε όπως και στην προηγούμενη άσκηση. Έστω Y_i ο αριθμός λαθών στην σελίδα i, και

$$X_i := \begin{cases} 1 & \text{αν η σελίδα } i \text{ δεν έχει καθόλου λάθη} \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Ξέρουμε ότι $Y_i \sim \mathrm{Poisson}(0.7)$. Η X_i ακολουθεί την κατανομή Bernoulli(p) με $p = P(Y_i = 0) = e^{-0.7}(0.7)^0/0! = e^{-0.7} \approx 1/2$. $E(X_1) = p \approx 1/2, V(X_1) = p(1-p) \approx 1/4$. Άρα

$$P(S_{64} \le 36) \approx P(S_{64} - 32 \le 4) = P\left(\frac{S_{64}-32}{\sqrt{64/4}} \le 1\right) \approx \Phi(1).$$

Η πρώτη ισότητα είναι προσέγγιση γιατί χρησιμοποιήσαμε τις προσεγγιστικές τιμές για τα $E(X_1), V(X_1)$. Η τελευταία ισότητα προκύπτει από το κεντρικό οριακό θεώρημα.

30. Συνοπτική λύση. Έστω X_i το αποτέλεσμα της i μέτρησης. $E(X_i) = 0, V(X_i) = (0.1)^2/12 = 0.01/12$.

$$\begin{aligned} P(|S_{300}| \le 0.25) &= P\left(\left|\frac{S_{300} - 300 \times 0}{\sqrt{300 \times 0.01/12}}\right| \le \frac{0.25}{\sqrt{300 \times 0.01/12}}\right) \approx P(|Z| \le 0.5) \\ &= \Phi(0.5) - \Phi(-0.5) = 2\Phi(0.5) - 1 \end{aligned}$$

όπου $Z \sim N(0,1)$, και χρησιμοποιήσαμε το κεντρικό οριακό θεώρημα.

31. Έστω $\{X_i : 1 \le i \le 200\}$ και $\{Y_i : 1 \le i \le 200\}$ οι επιδόσεις των φοιτητών των ομάδων A και B αντίστοιχα. Θέτουμε $W_i := X_i - Y_i$ για κάθε $i \in \{1, 2, \ldots, 200\}$. Τότε

$$M_A - M_B = \frac{1}{200}\sum_{i=1}^{200} X_i - \frac{1}{200}\sum_{i=1}^{200} Y_i = \frac{1}{200}\sum_{i=1}^{200} W_i.$$

Οι $\{W_i : 1 \le i \le 200\}$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, και έχουν όλες την ίδια κατανομή, με μέση τιμή $\mu = E(W_1) = E(X_1) - E(Y_1) = 9 - 8.5 = 0.5$, και διασπορά

$$V(W_1) = V(X_1 - Y_1) = V(X_1) + V(Y_1) - 2\mathrm{Cov}(X_1, Y_1) = V(X_1) + V(Y_1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

λόγω ανεξαρτησίας των X_1, Y_1.

Οπότε

$$\begin{aligned}
P(M_A - M_B \in [0.5, 0.65]) &= P\left(\frac{1}{200}\sum_{i=1}^{200} W_i \in [0.5, 0.65]\right) = P\left(\frac{1}{200}\sum_{i=1}^{200} W_i - 0.5 \in [0, 3/20]\right) \\
&= P\left(\sum_{i=1}^{200} W_i - 200 \times 0.5 \in [0, 30]\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{200} W_i - 200 \times 0.5}{\sqrt{200 \times 1/2}} \in [0, 3]\right) \\
&\approx P(Z \in [0, 3]) = \Phi(3) - \Phi(0) = \Phi(3) - 1/2 = 0.4987,
\end{aligned}$$

όπου $Z \sim N(0, 1)$.