Πιθανότητες ΙΙ. Προβλήματα

1. Έστω διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής (τέτοια τυχαία μεταβλητή υπάρχει)

$$F(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{2}+\frac{y}{2} & \text{αν } 0\le y\le x\le 1,\\ \frac{x^2y^2}{2}+\frac{x}{2} & \text{αν } 0\le x\le y\le 1.\end{cases}$$

(α) Να συμπληρωθούν οι τιμές της F για (x,y) εκτός του $[0,1]^2$.

(β) Να υπολογιστεί η $h(x,y)=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x,y)$ όπου αυτή υπάρχει, και το ολοκλήρωμα $\iint_{\mathbb{R}^2} h(x,y)\,dx\,dy$.

(γ)* Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(Y\le X\le 1/2)$.

2. Έστω διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής

$$F(x,y)=\begin{cases}xy & \text{αν } 0\le x,y\le 1, x+y\le 1\\ -1+x+2y-y^2 & \text{αν } 0\le x,y\le 1, x+y>1\end{cases}$$

(α) Να συμπληρωθούν οι τιμές της F για (x,y) εκτός του $[0,1]^2$.

(β) Να υπολογιστεί η $h(x,y)=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x,y)$ όπου αυτή υπάρχει, και το ολοκλήρωμα $\iint_{\mathbb{R}^2} h(x,y)\,dx\,dy$.

(γ)* Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(Y>X)$.

3. Οι επιβάτες $E_1,E_2,\dots,E_n$ ενός αεροσκάφους n θέσεων, που είναι αριθμημένες $1,2,...,n$, έχουν κάρτες επιβίβασης που τους δίνουν τις θέσεις $1,2,...,n$ αντίστοιχα. Επιβιβάζονται διαδοχικά, πρώτα ο A_1 μετά ο A_2 κ.ο.κ. Κατά την επιβίβαση όμως, για κάποιο ανεξήγητο λόγο, ο A_1 επιλέγει τυχαία μιά από τις n θέσεις, όχι απαραίτητα αυτήν που του αντιστοιχεί (την 1 δηλαδή). Καθένας από τους επόμενους καταλαμβάνει την θέση που γράφει η κάρτα επιβίβασης του εκτός αν αυτή έχει καταληφθεί ήδη, οπότε επιλέγει τυχαία μιά από τις μη κατειλημμένες θέσεις.

(α) Ποιά είναι η πιθανότητα ο τελευταίος επιβάτης να καταλάβει την θέση που του αντιστοιχεί (την n δηλαδή);

(β) Ποιά είναι η πιθανότητα ο επιβάτης που έχει σειρά k από το τέλος (δηλαδή ο E_{n-k+1}) να καταλάβει την θέση που του αντιστοιχεί;

4. Έστω $(U_n)_{n\ge 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, καθεμία με κατανομή ομοιόμορφη στο $(0,1)$.

(α) Για $x\in(0,1]$, έστω

$$N_x := \inf\left\{n : \sum_{k=1}^{n}\sqrt{U_k}>x\right\}.$$

Να βρεθεί η $E(N_x)$.

(β) Για $x\in(0,1]$, έστω

$$M_x := \inf\left\{n : \prod_{k=1}^{n}\sqrt{U_k}<x\right\}.$$

Να βρεθεί η $E(M_x)$.

5. Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, καθεμία με κατανομή εκθετική με παράμετρο 1. Για κάθε $n \geq 1$, θέτουμε

$$M_n := \max\left\{X_1, \frac{X_1+X_2}{2}, \frac{X_1+X_2+X_3}{3}, \dots, \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right\}.$$

Να δειχθεί ότι

$$E(M_n) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

Σχόλια

1. Στο Mathematica, οι εντολές

$f[x\_, y\_] := ((x^2y^2 + y)/2)Boole[y < x] + ((x^2y^2 + x)/2)Boole[y >= x];$
$Plot3D[f[x, y], \{x, 0, 1\}, \{y, 0, 1\}]$

βγάζουν το γράφημα της F στο $[0, 1]^2$.

(γ) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι 17/64.

2. (γ) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι 3/8.

3. Δοκιμάστε μερικά σενάρια για να δείτε πως λειτουργεί η διαδικασία επιβίβασης.