ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΙΙ, 28/9/2006

Θέμα 1ο: Έστω X και Y ανεξάρτητες και ισόνομα κατανεμημένες γεωμετρικές τυχαίες μεταβλητές:

$$f_X(x) = pq^{x-1},\ x = 1,2,\ldots,\ f_Y(y) = pq^{y-1},\ y = 1,2,\ldots,\ q = 1-p,\ 0 < p < 1.$$

Να βρεθούν (α) η συνάρτηση πιθανότητας $f_Z(z)$ του αθροίσματος $Z = X + Y$, (β) οι δεσμευμένες συναρτήσεις πιθανότητας $f_{X|Z}(x \mid z)$, της X δεδομένης της $Z = z$, και $f_{Z|X}(z \mid x)$, της Z δεδομένης της $X = x$, και να υπολογισθεί (γ) η δεσμευμένη μέση τιμή $E(X \mid Z = z)$ της X δεδομένης της $Z = z$.

Θέμα 2ο: Έστω X και Y θετικές συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας $f_{X,Y}(x,y)$, $0 < x < \infty$, $0 < y < \infty$ και ας θεωρήσουμε τις τυχαίες μεταβλητές $Z = X + Y$ και $W = X / Y$. (α) Να βρεθεί η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας $f_{Z,W}(z,w)$ των Z και W συναρτήσει της $f_{X,Y}(x,y)$ (**διαπιστώνοντας** ότι πληρούνται οι προϋποθέσεις εφαρμογής σχετικού θεωρήματος). Επίσης, αν X και Y είναι ανεξάρτητες θετικές συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με συναρτήσεις πυκνότητας

$$f_X(x) = \frac{\theta^\kappa}{(\kappa-1)!} x^{\kappa-1} e^{-\theta x},\ 0 < x < \infty,\ f_Y(y) = \frac{\theta^\nu}{(\nu-1)!} y^{\nu-1} e^{-\theta y},\ 0 < y < \infty,$$

όπου κ και ν θετικοί ακέραιοι και $0 < \theta < \infty$, (β) να εξετασθεί κατά πόσον οι τυχαίες μεταβλητές Z και W είναι ανεξάρτητες και (γ) να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας της W.

Θέμα 3ο: (α) Έστω X_1 και X_2 ανεξάρτητες κανονικές τυχαίες μεταβλητές με $E(X_i) = \mu_i$ και $V(X_i) = \sigma_i^2$, $i = 1,2$. Χρησιμοποιώντας τη ροπογεννήτρια της κανονικής κατανομής,

$$M(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2},\ -\infty < t < \infty,$$

δείξτε ότι η διαφορά $Y = X_1 - X_2$ ακολουθεί την κανονική κατανομή και υπολογίστε τη μέση τιμή $E(Y)$ και τη διασπορά $V(Y)$.

(β) Έστω ότι δύο παίκτες A και B παίζουν, ο ένας ανεξάρτητα από τον άλλο, ένα παιγνίδι τύχης στο οποίο η πιθανότητα επιτυχίας είναι $p = 1/4$ (και αποτυχίας $q = 3/4$). Αν κάθε παίκτης παίξει $\nu = 96$ παιγνίδια, να υπολογισθεί κατά προσέγγιση η πιθανότητα ο παίκτης A να σημειώσει 8 τουλάχιστο νίκες περισσότερες από τον παίκτη B.

[Δίνονται: $\Phi(0{,}33) = 0{,}63$, $\Phi(1) = 0{,}84$ και $\Phi(1{,}33) = 0{,}91$].

Απαντήστε και στα 3 θέματα. Διάρκεια εξέτασης 2 ½ ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ