ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΙΙ, 20/7/2007

Θέμα 1ο: (α) Οι περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας υπολογίζονται ως εξής:

$$f_X(x)=\sum_{y=0}^{2} f_{X,Y}(x,y)=\sum_{y=0}^{2}\frac{2x+y+1}{36}=\frac{6x+6}{36}=\frac{x+1}{6},\quad x=0,1,2\,,$$

$$f_Y(y)=\sum_{x=0}^{2} f_{X,Y}(x,y)=\sum_{x=0}^{2}\frac{2x+y+1}{36}=\frac{3y+9}{36}=\frac{y+3}{12},\quad y=0,1,2\,.$$

Η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας είναι

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}=\frac{2x+y+1}{6(x+1)},\quad y=0,1,2\,,\quad (x=0,1,2)\,.$$

Η καμπύλη παλινδρόμησης υπολογίζεται ως εξής

$$y=m_{Y|X}(x)=E(Y\,|\,x)=\sum_{y=0}^{2} y f_{Y|X}(y\,|\,x)=\sum_{y=0}^{2}\frac{y(2x+y+1)}{6(x+1)}=\frac{3x+4}{3(x+1)}\,.\qquad \textbf{(5μ)}$$

(β) Η συνδιακύμανση υπολογίζεται ως εξής:

$$E(XY)=\sum_{y=0}^{2}\sum_{x=0}^{2} xy f_{X,Y}(x,y)=\sum_{y=0}^{2}\sum_{x=0}^{2}\frac{xy(2x+y+1)}{36}=\sum_{y=0}^{2}\frac{y(3y+13)}{36}=\frac{3}{2},$$

$$E(X)=\sum_{x=0}^{2} x f_X(x)=\sum_{x=0}^{2}\frac{x(x+1)}{6}=\frac{4}{3},\ E(Y)=\sum_{y=0}^{2} y f_Y(y)=\sum_{y=0}^{2}\frac{y(y+3)}{12}=\frac{7}{6},$$

$$C(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{3}{2}-\frac{4}{3}\cdot\frac{7}{6}=-\frac{1}{18}\,.$$

Ο συντελεστής συσχέτισης υπολογίζεται ως εξής:

$$E(X^2)=\sum_{x=0}^{2} x^2 f_X(x)=\sum_{x=0}^{2}\frac{x^2(x+1)}{6}=\frac{7}{3}\,,\ V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{7}{3}-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{5}{9}\,,$$

$$E(Y^2)=\sum_{y=0}^{2} y^2 f_Y(y)=\sum_{y=0}^{2}\frac{y^2(y+3)}{12}=2\,,\ V(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=2-\left(\frac{7}{6}\right)^2=\frac{23}{36}$$

$$\rho(X,Y)=\frac{C(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}=\frac{-\dfrac{1}{18}}{\dfrac{\sqrt{5\cdot 23}}{3\cdot 6}}=-\frac{1}{\sqrt{115}}\,.\qquad \textbf{(5μ)}$$

Θέμα 2ο: (α) Η συνάρτηση πυκνότητας της διαφοράς $W = X - Y$ δίνεται από την

$$f_W(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(w+y) f_Y(y) dy\,,\ \ -1 \le w \le 1.$$

Επειδή $f_X(x) = 1,\ 0 \le x \le 1$ και $f_Y(y) = 1,\ 0 \le y \le 1$, η υπό το ολοκλήρωμα συνάρτηση δεν είναι μηδέν όταν και οι δύο παράγοντες δεν είναι μηδέν δηλαδή για $0 \le w + y \le 1$ και $0 \le y \le 1$ ή ισοδύναμα για $-w \le y \le 1 - w$ και $0 \le y \le 1$. Επομένως αν $-1 \le w \le 0$, η υπό το ολοκλήρωμα συνάρτηση δεν είναι μηδέν για $-w \le y \le 1$ ενώ αν $0 \le w \le 1$, δεν είναι μηδέν για $0 \le y \le 1 - w$. Έτσι παίρνουμε

$$f_W(w) = \begin{cases} \int_{-w}^{1} dy = 1 + w, & -1 \le w \le 0 \\ \int_{0}^{1-w} dy = 1 - w, & 0 \le w \le 1 \end{cases}$$

οπότε

$$f_W(w) = 1 - |w|,\ \ -1 \le w \le 1. \qquad \textbf{(5μ)}$$

(β) Η συνάρτηση πυκνότητας του γινομένου $Z = XY$ δίνεται από την

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z/y) f_Y(y) \frac{1}{|y|} dy\,,\ \ -\infty < z < \infty.$$

Η υπό το ολοκλήρωμα συνάρτηση δεν είναι μηδέν για $|x| = \dfrac{|z|}{y} \le 1$ και $0 < y < \infty$ δηλαδή $|z| < y < \infty$. Επομένως

$$f_Z(z) = \frac{1}{\pi} \int_{|z|}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1 - z^2/y^2}} e^{-y^2/2} dy\,.$$

Εκτελώντας το μετασχηματισμό $t = \sqrt{y^2 - z^2}$, οπότε $y = \sqrt{t^2 + z^2}$ και $dy = tdt/\sqrt{t^2 + z^2}$, παίρνουμε

$$f_Z(z) = \frac{1}{\pi} e^{-z^2/2} \int_0^{\infty} e^{-t^2/2} dt$$

και επειδή (σύμφωνα με το ολοκλήρωμα της τυποποιημένης κανονικής)

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2/2} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2},$$

συμπεραίνουμε ότι

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2},\ -\infty < z < \infty. \qquad \textbf{(5μ)}$$

Θέμα 3ο: (α) Έστω X_κ το σφάλμα από τη στρογγύλευση του *k*-οστού αριθμού, $\kappa = 1,2,...,\nu$, και $S_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} X_\kappa$ το συνολικό σφάλμα από τη στρογγύλευση *ν* αριθμών. Τότε χρησιμοποιώντας την ομοιόμορφη κατανομή στο $[-1/2,\ 1/2]$ παίρνουμε

$$E(X_\kappa) = 0\,,\ \ V(X_\kappa) = \frac{1}{12},\ \ \kappa = 1,2,...,\nu\,,$$

και επομένως

$$E(S_\nu) = \sum_{\kappa=1}^{\nu} E(X_\kappa) = 0\,,\ \ V(S_\nu) = \sum_{\kappa=1}^{\nu} V(X_\kappa) = \frac{\nu}{12}$$

και για $\nu = 108$

$$E(S_{108}) = 0\,,\ \ \ V(S_{108}) = \frac{108}{12} = 9\,.$$

Χρησιμοποιώντας το ΚΟΘ με $Z_{108} = \dfrac{S_{108} - E(S_{108})}{\sqrt{V(S_{108})}}$ παίρνουμε για τη ζητούμενη πιθανότητα

$$P(|\,S_{108}\,| \le 6) = P(|\,Z_{108}\,| \le \frac{6-0}{3}) = P(-2 \le Z_{108} \le 2) \cong \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1$$

$$= 2 \cdot (0{,}9773) - 1 = 0{,}9546\,. \qquad \textbf{(5μ)}$$

(β) Χρησιμοποιώντας το ΚΟΘ με $Z_\nu = \dfrac{S_\nu - E(S_\nu)}{\sqrt{V(S_\nu)}}$ παίρνουμε τη σχέση

$$P(|\,S_\nu\,| \le 0) = P(|\,Z_\nu\,| \le \frac{9}{\sqrt{\nu/12}}) = P\left(-\frac{18\sqrt{3}}{\sqrt{\nu}} \le Z_\nu \le \frac{18\sqrt{3}}{\sqrt{\nu}}\right) = 2\Phi\left(\frac{18\sqrt{3}}{\sqrt{\nu}}\right) - 1 \ge 0{,}95$$

και σύμφωνα με τη συνθήκη $P(|\,S_\nu\,| \le 0) \ge 0{,}95$ και το ότι η συνάρτηση κατανομής $\Phi(z)\ \ -\infty < z < \infty$, είναι αύξουσα, συνάγουμε διαδοχικά τις ανισότητες

$$2\Phi\left(\frac{18\sqrt{3}}{\sqrt{\nu}}\right) - 1 \ge 0{,}95\,,\ \ \Phi\left(\frac{18\sqrt{3}}{\sqrt{\nu}}\right) \ge 0{,}975\,,\ \ \frac{18\sqrt{3}}{\sqrt{\nu}} \ge 1{,}96\,,\ \ \nu \le \frac{3\cdot(18)^2}{(1{,}96)^2} = 253\,.$$

Επομένως

$$\nu \le 253\,. \qquad \textbf{(5μ)}$$