ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΙΙ (ΟΜΑΔΑ Α), 2/7/2009

1. Έστω (X, Y) συνεχής διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_{X,Y}(x, y) = 2e^{-2x}, \quad |y| < x < \infty,$$

(α) Να υπολογισθούν οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας $f_X(x)$ και $f_Y(y)$ και να εξετασθεί κατά πόσον οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ασυσχέτιστες. (β) Να βρεθεί η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των τυχαίων μεταβλητών $Z = X + Y$ και $W = X - Y$ και να εξετασθεί κατά πόσον οι τυχαίες αυτές μεταβλητές είναι ανεξάρτητες.

2. (α) Έστω X και Y ανεξάρτητες διακριτές τυχαίες μεταβλητές με συναρτήσεις πιθανότητας

$$f_X(x) = \binom{9}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{9-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, 9,$$

$$f_Y(y) = \binom{11}{y}\left(\frac{1}{3}\right)^y\left(\frac{2}{3}\right)^{11-y}, \quad y = 0, 1, \ldots, 11,$$

και $Z = X + Y$. Να υπολογισθούν η συνάρτηση πιθανότητας της Z και η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της X δεδομένου ότι $Z = z$

(β) Αν X και Y ανεξάρτητες συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με συναρτήσεις πυκνότητας

$$f_X(x) = \frac{x^3}{3!2^4}e^{-x/2}, \quad x > 0, \qquad f_Y(y) = \frac{y^5}{5!2^6}e^{-y/2}, \quad y > 0,$$

να υπολογισθεί η συνάρτηση πυκνότητας του πηλίκου $W = X/Y$.

3. Έστω X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_X(x) = e^{-2|x|}, \quad -\infty < x < \infty.$$

(α) Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια $M_X(t)$, όπου αυτή υπάρχει, και συμπεράνετε τις ροπές $E(X^r)$, $r = 1, 2, \ldots$. (β) Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια $M_Y(t)$ της τυχαίας μεταβλητής $Y = |X|$, όπου αυτή υπάρχει.

4. (α) Έστω X_κ ο αριθμός των επιτυχιών στην κ-οστή δοκιμή μιας ακολουθίας ανεξαρτήτων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p_κ, $\kappa = 1, 2, \ldots$. Αν

$$\bar{X}_\nu = \frac{1}{\nu}\sum_{\kappa=1}^{\nu} X_\kappa, \quad \text{και} \quad \bar{p}_\nu = \frac{1}{\nu}\sum_{\kappa=1}^{\nu} p_\kappa,$$

δείξτε ότι η ακολουθία $Y_\nu = \bar{X}_\nu - \bar{p}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$ συγκλίνει στοχαστικά στο 0.

(β) Ένας καλαθοσφαιριστής επιτυγχάνει στο 60% των βολών που επιχειρεί. Αν εκτελέσει 54 βολές ποιά είναι η πιθανότητα να ευστοχήσει σε περισσότερες από τις μισές;

$[\Phi(1,5) = 0,9332,\ \Phi(2) = 0,9773,\ \Phi(3) = 0,9987]$

Απαντήστε και στα 4 θέματα. Διάρκεια εξέτασης 2 1/2 ώρες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΙΙ (ΟΜΑΔΑ Β), 2/7/2009

1. Έστω (X, Y) συνεχής διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_{X,Y}(x,y) = 8e^{-4y}, \quad |x| < y < \infty,$$

(α) Να υπολογισθούν οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας $f_X(x)$ και $f_Y(y)$ και να εξετασθεί κατά πόσον οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ασυσχέτιστες. (β) Να βρεθεί η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των τυχαίων μεταβλητών $Z = X + Y$ και $W = Y - X$ και να εξετασθεί κατά πόσον οι τυχαίες αυτές μεταβλητές είναι ανεξάρτητες.

2. (α) Έστω X και Y ανεξάρτητες διακριτές τυχαίες μεταβλητές με συναρτήσεις πιθανότητας

$$f_X(x) = \binom{8}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{8-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, 8,$$

$$f_Y(y) = \binom{12}{y}\left(\frac{1}{3}\right)^y\left(\frac{2}{3}\right)^{12-y}, \quad y = 0, 1, \ldots, 12,$$

και $Z = X + Y$. Να υπολογισθούν η συνάρτηση πιθανότητας της Z και η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της X δεδομένου ότι $Z = z$

(β) Αν X και Y ανεξάρτητες συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με συναρτήσεις πυκνότητας

$$f_X(x) = \frac{x^5}{5!2^6}e^{-x/2}, \quad x > 0, \qquad f_Y(y) = \frac{y^3}{3!2^4}e^{-y/2}, \quad y > 0,$$

να υπολογισθεί η συνάρτηση πυκνότητας του πηλίκου $W = X/Y$.

3. Έστω X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_X(x) = 2e^{-4|x|}, \quad -\infty < x < \infty.$$

(α) Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια $M_X(t)$, όπου αυτή υπάρχει, και συμπεράνετε τις ροπές $E(X^r)$, $r = 1, 2, \ldots$. (β) Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια $M_Y(t)$ της τυχαίας μεταβλητής $Y = |X|$, όπου αυτή υπάρχει.

4. (α) Έστω X_κ ο αριθμός των επιτυχιών στην κ-οστή δοκιμή μιας ακολουθίας ανεξαρτήτων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p_κ, $\kappa = 1, 2, \ldots$. Αν

$$\bar{X}_\nu = \frac{1}{\nu}\sum_{\kappa=1}^{\nu} X_\kappa, \quad \text{και} \quad \bar{p}_\nu = \frac{1}{\nu}\sum_{\kappa=1}^{\nu} p_\kappa,$$

δείξτε ότι η ακολουθία $Y_\nu = \bar{X}_\nu - \bar{p}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$ συγκλίνει στοχαστικά στο 0.

(β) Ένας καλαθοσφαιριστής επιτυγχάνει στο 75% των βολών που επιχειρεί. Αν εκτελέσει 48 βολές ποιά είναι η πιθανότητα να ευστοχήσει σε περισσότερες από 30 βολές;

[$\Phi(1,5) = 0,9332$, $\Phi(2) = 0,9773$, $\Phi(3) = 0,9987$]

Απαντήστε και στα 4 θέματα. Διάρκεια εξέτασης 2 1/2 ώρες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΙΙ (1/9/2009)

1. Έστω (X, Y) μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με σύνάρτηση πιθανότητας

$$f(x, y) = \frac{1}{55}, \qquad x = 1, 2, \ldots, y, \; y = 1, 2, \ldots, 10.$$

Να υπολογισθούν (α) οι περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας $f_X(x)$ και $f_Y(y)$ και (β) η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας $f_{Y|X}(y \mid x)$ και η συνάρτηση παλινδρόμησης $m_{Y|X}(x) = E(Y \mid x)$.

2. (α) Αν X και Y είναι ανεξάρτητες συνεχείς τυχαίες μεταβλητές και κάθε μια κατανέμεται ομοιόμορφα στο διάστημα $[0, 1]$, να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας του αθροίσματος $Z = X + Y$.
(β) Αν X και Y είναι ανεξάρτητες διακριτές τυχαίες μεταβλητές και κάθε μια ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με

$$f_X(x) = pq^x, \; x = 0, 1, \ldots, \qquad f_Y(y) = pq^y, \; y = 0, 1, \ldots, \qquad q = 1 - p, \; 0 < p < 1,$$

να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας της διαφοράς $W = X - Y$.

3. Έστω X_j, $j = 1, 2, \ldots$, ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων δίτιμων τυχαίων μεταβλητών με κοινή συνάρτηση πιθανότητας

$$f_X(x) = p^x q^{1-x}, \qquad x = 0, 1, \quad q = 1 - p, \; 0 < p < 1,$$

και N μια μη αρνητική ακέραιη τυχαία μεταβλητή ανεξάρτητη από τις X_j, $j = 1, 2, \ldots$, με συνάρτηση πιθανότητας

$$f_N(\nu) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^\nu}{\nu!}, \quad \nu = 0, 1, \ldots, \; 0 < \lambda < \infty.$$

Αν $S_N = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$, να βρεθούν (α) η συνάρτηση πιθανότητας $f_{S_N}(s)$, $s = 0, 1, \ldots$, και (β) η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας $f_{S_N|N}(s \mid \nu)$, $s = 0, 1, \ldots, \nu$.

4. (α) Έστω ότι η διάρκεια ζωής T ηλεκτρικών λαμπτήρων ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή $E(T) = 300$ ώρες. Ένα δείγμα 36 λαμπτήρων ελέγχεται για 210 ώρες και καταγράφεται ο συνολικός αριθμός S_{36} των λαμπτήρων που επέζησαν του ελέγχου. Να υπολογισθεί (κατά προσέγγιση) η πιθανότητα $P(S_{36} > 24)$.

(β) Ας θεωρήσουμε μια στοχαστική ακολουθία ανεξαρτήτων επιλογών αριθμών από το διάστημα $(0, 1)$. Έστω X_k ο αριθμός που εκλέγεται στην κ-οστή επιλογή, $\kappa = 1, 2, \ldots$. Να δειχθεί ότι η ακολουθία $\overline{X}_\nu = \frac{1}{\nu} \sum_{\kappa=1}^{\nu} X_\kappa$, $\nu = 1, 2, \ldots$, συγκλίνει στοχαστικά στο 1/2.

$$\left[e^{-0.7} \simeq 1/2, \quad \Phi(1) = 0,841, \quad \Phi(2) = 0,977, \quad \Phi(3) = 0,999 \right]$$

Απαντήστε και στα 4 θέματα. Διάρκεια εξέτασης 2 1/2 ώρες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ