ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΙΙ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2010

Θέμα 1. Έστω X_1 και X_2 δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, ομοιόμορφα κατανεμημένες στο διάστημα $(0,1)$. Θέτουμε $X = X_1$ και $Y = X_1 + X_2$.

(α) Να βρεθεί η από κοινού πυκνότητα πιθανότητας, $f_{X,Y}(x,y)$, των X, Y, καθώς και οι περιθώριες $f_X(x)$ και $f_Y(y)$.

(β) Να προσδιοριστεί η καμπύλη παλινδρόμησης της X στην Y, $x = E(X|y)$, καθώς και η δεσμευμένη διασπορά, $V(X|y)$.

(γ) Να προσδιοριστεί συνάρτηση $h = h(Y)$ για την οποία ελαχιστοποιείται το μέσο τετραγωνικό σφάλμα $E\{[X - h(Y)]^2\}$, και να υπολογισθεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα για τη συγκεκριμένη αυτή συνάρτηση.

Θέμα 2. Οι τυχαίες μεταβλητές X_i, $i = 1,2,3$, είναι ανεξάρτητες Poisson(λ_i), $\lambda_i > 0$, δηλαδή

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3) = \frac{e^{-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3}\lambda_1^{x_1}\lambda_2^{x_2}\lambda_3^{x_3}}{x_1!x_2!x_3!}, \quad x_1, x_2, x_3 \in \{0,1,2,\ldots\}.$$

(α) Θέτουμε $N = X_1+X_2+X_3$. Να υπολογισθεί η από κοινού (δεσμευμένη) συνάρτηση πιθανότητας των X_1, X_2 δεδομένου ότι $N = \nu$, $\nu \in \{0,1,\ldots\}$, και να συμπεράνετε τις δεσμευμένες μέσες τιμές $E(X_i|N=\nu)$, $i = 1,2$, τις δεσμευμένες διασπορές $V(X_i|N=\nu)$, $i = 1,2$, καθώς και τη δεσμευμένη συνδιακύμανση $C(X_1, X_2|N=\nu)$.

(β) Να υπολογισθεί η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των $X = X_1 + X_2$ και $Y = X_2 + X_3$, καθώς και ο συντελεστής συσχέτισης, $\rho(X,Y)$, και να εξετασθεί κατά πόσον οι X και Y είναι στοχαστικά ανεξάρτητες.

Θέμα 3. (α) Θεωρούμε μία ακολουθία ανεξαρτήτων και ισονόμων τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \ldots$ με μέση τιμή μ και (πεπερασμένη) διασπορά $\sigma^2 > 0$. Θέτουμε $Y_i = X_i + X_{i+1}$, $i = 1,2,\ldots$.

(α) Να αποδειχθεί ότι υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\frac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_\nu}{\nu} \longrightarrow c \ \text{ κατά πιθανότητα, } \quad \text{καθώς } \nu \to \infty.$$

(β) Υποθέτοντας ότι οι X_i έχουν πεπερασμένη ροπογεννήτρια σε μία περιοχή του μηδενός, να προσδιοριστεί το όριο

$$\lim_{\nu\to\infty} P\left(\frac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_\nu - 2\nu\mu}{2\sqrt{\nu\sigma^2}} \le x\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(γ) Στην ειδική περίπτωση που οι X_i ακολουθούν τυποποιημένη κανονική, $N(0,1)$, να προσδιοριστεί η πυκνότητα πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής

$$Y = \frac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_\nu}{2\sqrt{\nu}}.$$

ΔΙΑΡΚΕΙΑ $2\frac{1}{2}$ ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!