Πιθανότητες ΙΙ. Συμπληρωματικές Ασκήσεις

Μεση τιμη

1.1. Έστω X τυχαία μεταβλητή με κατανομή την κανονική $N(0,1)$. Για κάθε $x > 0$ να δειχθεί ότι

$$\frac{x}{x^2+1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-x^2/2} \le \mathbf{P}(X > x) \le \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-x^2/2}. \tag{1}$$

Δηλαδή, για μεγάλο x, έχουμε $\mathbf{P}(X > x) \sim cx^{-1}e^{-x^2/2}$ με $c = 1/\sqrt{2\pi}$.

1.2. Έστω $(A_n)_{n\ge1}$ ακολουθία μετρήσιμων συνόλων σε ένα χώρο πιθανότητας. Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{P}(\liminf_n A_n) \le \varliminf_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) \le \varlimsup_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) \le \mathbf{P}(\limsup_n A_n).$$

1.3. Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας ώστε $\mathbf{P}(A) \in \{0,1\}$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$, και $X : \Omega \to \mathbb{R}$ συνάρτηση $\mathcal{A}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ μετρήσιμη. Να δειχθεί ότι, με πιθανότητα 1, η X είναι σταθερή. Δηλαδή υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε $\mathbf{P}(X = c) = 1$.

1.4*. Έστω $(r_k)_{k\ge1}$ μιά αρίθμηση των ρητών του $(0,1)$. Ορίζουμε $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ ως

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\frac{1}{\sqrt{|x-r_n|}}.$$

Να δειχθεί ότι το μέτρο Lebesgue των σημείων του (0, 1) στα οποία η f απειρίζεται είναι 0. Δηλαδή η f είναι σχεδόν παντού πεπερασμένη.

1.5. Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(|X| > n) = 0$.

1.6. Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(X \ge k).$$

1.7. Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $[0,\infty]$. Να δειχθεί ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(X \ge k) \le \mathbf{E}X \le 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(X \ge k).$$

1.8. Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $[0,\infty)$, και $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο. Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E}(g(X)) = g(0) + \int_0^{\infty} g'(t)\mathbf{P}(X > t)\,dt.$$

Ειδικότερα, για $p > 0$,

$$\mathbf{E}(X^p) = p\int_0^{\infty} t^{p-1}\mathbf{P}(X > t)\,dt.$$

1.9. Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών (με πραγματικές τιμές, και ορισμένες σε κοινό χώρο πιθανότητας). Για $\varepsilon > 0$ και $n \geq 1$ θέτουμε

$$A_n^\varepsilon := \{|X_n| \geq \varepsilon\}.$$

Να δειχθεί ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) $\mathbf{P}(\lim_{n\to\infty} X_n = 0) = 1$.

(β) $\mathbf{P}(\limsup_n A_n^\varepsilon) = 0$ για κάθε $\varepsilon > 0$.

1.10. Έστω $X \in L^1(\mathbf{P})$ και $E_t := \{|X| \geq t\}$ για κάθε $t > 0$. Να δειχθεί ότι $\lim_{t\to\infty} t\,\mathbf{P}(E_t) \to 0$.

1.11. Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $[0, \infty]$. Να δειχθεί ότι:

(α)

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\varepsilon}\,\mathbf{E}(X\,\mathbf{1}_{X<\varepsilon}) = 0.$$

(β)

$$\lim_{M\to\infty} \frac{1}{M}\,\mathbf{E}(X\,\mathbf{1}_{X<M}) = 0.$$

1.12. Έστω X, Y τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $(0, \infty)$ ώστε $XY \geq 1$ παντού. Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) \geq 1.$$

Ειδικότερα

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{X}\right) \geq \frac{1}{\mathbf{E}(X)}.$$

1.13*. Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}$ ώστε $\mathbf{E}(X^2) = \infty$. Να δειχθεί ότι

$$\lim_{M\to\infty} \frac{\{\mathbf{E}(X\mathbf{1}_{|X|\leq M})\}^2}{\mathbf{E}(X^2\mathbf{1}_{|X|\leq M})} = 0.$$

1.14. (Η ανισότητα Jensen) Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές σε ένα διάστημα $I \subset \mathbb{R}$, και $\phi : I \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Αν οι $\mathbf{E}X, \mathbf{E}(\phi(X))$ ορίζονται και είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε

$$\phi(\mathbf{E}X) \leq \mathbf{E}(\phi(X)).$$

[Υπόδειξη: Έστω $a := \mathbf{E}X$. Υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\phi(x) \geq \phi(a) + \lambda(x - a)$ για κάθε $x \in I$ (Απειροστικός ΙΙ). Θέτουμε όπου x την τ. μ. X.]

1.15. Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $[0, \infty)$.

$$(\mathbf{E}X)^p \begin{cases} \leq \mathbf{E}(X^p) & \text{αν } p \geq 1, \\ \geq \mathbf{E}(X^p) & \text{αν } p < 1. \end{cases}$$

Αν οι $\mathbf{E}X, \mathbf{E}(\log X)$ ορίζονται και είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε

$$\log \mathbf{E}X \geq \mathbf{E}(\log X).$$

Ανεξαρτησια. Τα λημματα Borel-Cantelli
Ο νομος 0-1 του Kolmogorov

2.1*. Έστω X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$ ώστε $\mathbf{P}(X = Y) = 1$. Να δειχθεί ότι υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε $\mathbf{P}(X = c) = 1$.

2.2. Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών (ορισμένες σε κοινό χώρο Ω) με $\mathbf{P}(X_n \neq 0) = n^{-2}$ για κάθε $n \geq 1$. Να δειχθεί ότι με πιθανότητα 1, για κάθε $\omega \in \Omega$ υπάρχει $n(\omega)$ φυσικός ώστε $X_n(\omega) = 0$ για κάθε $n \geq n(\omega)$. Και άρα $X_n \to 0$ με πιθανότητα 1.

2.3. Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με τιμές στο $\mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι για την τυχαία μεταβλητή $X^* = \sup_{n\geq 1} X_n$ ισχύει $\mathbf{P}(X^* < \infty) = 1$ αν και μόνο αν υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(X_n > M) < \infty$.

2.4. Αν $(X_n)_{n\geq 1}$ είναι ακολουθία τυχαίων μεταβλητών με τιμές στο $\mathbb{R}$, τότε υπάρχει ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών $(a_n)_{n\geq 1}$ ώστε $\lim_{n\to\infty} X_n/a_n = 0$ με πιθανότητα 1.

2.5*. Έστω $(A_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων ενδεχομένων με $\mathbf{P}(A_n) < 1$ για κάθε $n \geq 1$, και $\mathbf{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$. Να δειχθεί ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) = \infty$.

2.6. Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, καθεμία με κατανομή την εκθετική με παράμετρο 1. Να δειχθεί ότι με πιθανότητα 1 ισχύει

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{X_n}{\log n} = 1. \tag{2}$$

2.7*. Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, καθεμία με κατανομή την τυπική κανονική $N(0, 1)$. Να δειχθεί ότι με πιθανότητα 1 ισχύει

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{X_n}{\sqrt{2\log n}} = 1. \tag{3}$$

2.8. Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, καθεμία με κατανομή την ομοιόμορφη στο $(0, 1)$, και $M_n := \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ για κάθε $n \geq 1$. Να δειχθεί ότι με πιθανότητα 1 ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} M_n = 1. \tag{4}$$

2.9. Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, καθεμία με κατανομή την εκθετική με παράμετρο 1, και $M_n := \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ για κάθε $n \geq 1$. Να δειχθεί ότι με πιθανότητα 1 ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{\log n} = 1. \tag{5}$$

2.10*. Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών. Να δειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = 0 \text{ με πιθανότητα } 1 \Leftrightarrow \mathbf{E}|X_1| < \infty.$$

2.11. Έστω $\{X_i : i \in \mathbb{N}\}$ τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$, και $\mathcal{C}_\infty := \cap_{n=1}^{\infty}\sigma(X_n, X_{n+1}, ...)$ η τελική σ-άλγεβρα.

(α) Υποθέτουμε ότι οι X_i έχουν θετικές τιμές. Ποιές από τις παρακάτω τυχαίες μεταβλητές είναι $\mathcal{C}_\infty$ μετρήσιμες;

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}, \qquad \text{(iii)} \varlimsup_{n\to\infty} n(X_1 + X_2 + \cdots + X_n),$$

$$\text{(iv)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{2^k}, \qquad \text{(v)} \varlimsup_{n\to\infty} (X_n + X_{n+1}).$$

(β) Ποιά από τα παρακάτω σύνολα είναι στοιχεία της $\mathcal{C}_\infty$;

$$\text{(i)} \left\{\sum_{n=1}^{\infty} |X_n| < \infty\right\}, \qquad \text{(ii)} \left\{X_1 + X_2 + \cdots + X_n = 0 \text{ για άπειρα } n\right\},$$

$$\text{(iii)} \left\{\varlimsup_{n\to\infty} n|X_1 + X_2 + \cdots + X_n| \le 1\right\}, \quad \text{(iv)} \left\{\sum_{n=1}^{\infty} X_n \text{ συγκλίνει σε πραγματικό άριθμό}\right\}$$

$$\text{(v)} \left\{\sum_{k=n}^{2n} X_k > 0 \text{ για άπειρα } n\right\}.$$

[Σχόλιο: Κατ᾽ αρχάς, τα ερωτήματα να απαντηθούν διαισθητικά. Έπειτα, για το (β), για τα σύνολα τα οποία είναι στοιχεία της $\mathcal{C}_\infty$ να αποδειχθεί αυτό τυπικά. Για τα υπόλοιπα, να μην αποδειχθεί τίποτε. Για εκείνα δεν ισχυριζόμαστε ότι πάντοτε δεν είναι στοιχεία της $\mathcal{C}_\infty$, γιατί αυτό δεν είναι σωστό. Μπορούμε να φτιάξουμε τετριμμένα παραδείγματα που όλα αυτά τα σύνολα να είναι στοιχεία της $\mathcal{C}_\infty$. Με λίγη δουλειά όμως μπορούμε να βρούμε παραδείγματα που αυτά τα σύνολα δεν ανήκουν στην $\mathcal{C}_\infty$, και να το αποδείξουμε τυπικά. Παρόμοιο σχόλιο ισχύει για το μέρος (α) της άσκησης.]

2.12. Έστω $(X_n)_{n\ge1}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, καθεμία με κατανομή την τυπική κανονική $N(0,1)$. Για κάθε $n \ge 1$ θέτουμε $S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

(α) Για κάθε $A > 0$ και $n \ge 1$ να δειχθεί ότι

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \ge A\right) = 1 - \Phi(A) > 0$$

όπου Φ είναι η συνάρτηση κατανομής της $N(0,1)$. [Εδώ μπορείτε να χρησιμοποιήσετε πράγματα για κανονικές τυχαίες μεταβλητές και αθροίσματα τους που έχουμε μάθει στις Πιθανότητες Ι].

(β) Για κάθε $A > 0$, με πιθανότητα 1 ισχύει

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \ge A.$$

(γ) Με πιθανότητα 1 ισχύει

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \infty.$$

2.13. Έστω $\{A_i : i \in I\}$ στοιχεία της $\mathcal{A}$.

(α) Θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές $X_i := \mathbf{1}_{A_i}, i \in I$. Να δειχθεί ότι οι $\{X_i : i \in I\}$ είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν τα $\{A_i : i \in I\}$ είναι ανεξάρτητα.

(β) Αν τα $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ανεξάρτητα, τότε τα σύνολα $\liminf_n A_n, \limsup_n A_n$ έχουν πιθανότητα 0 ή 1.

2.14. Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών. Θεωρούμε την δυναμοσειρά

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n z^n.$$

(α) Να δειχθεί ότι η ακτίνα σύγκλισης R της f είναι μετρήσιμη ως προς την τελική σ-άλγεβρα των $(X_n)_{n\geq 1}$ και άρα είναι σταθερή με πιθανότητα 1.

(β) Αν υποθέσουμε επιπλέον ότι καθεμία από τις $(X_n)_{n\geq 1}$ έχει κατανομή $N(0,1)$, τότε με πιθανότητα 1 ισχύει $R = 1$.

2.15. Έστω $\{A_n : n \geq 1\}$ στοιχεία της $\mathcal{A}$ τα οποία είναι **ανα δύο ανεξάρτητα**. Θέτουμε

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i}$$

και

$$s_n := \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i).$$

(α) Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E}(S_n^2) = s_n + s_n^2 - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)^2 \leq s_n + s_n^2.$$

(β) Για κάθε $\varepsilon > 0$, να δειχθεί ότι

$$\mathbf{P}(S_n \geq \varepsilon s_n) \geq (1-\varepsilon)^2 \frac{s_n^2}{s_n^2 + s_n}.$$

(γ)* Αν επιπλέον ισχύει ότι $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i) = \infty$, να δειχθεί ότι $\mathbf{P}(\limsup_n A_n) = 1$.

[Η άσκηση αυτή γενικεύει το 2ο Λήμμα Borel-Cantelli κατά το ότι υποθέτουμε τα $\{A_n : n \geq 1\}$ ανά δύο ανεξάρτητα και όχι απαραίτητα πλήρως ανεξάρτητα.]

2.16. Έστω $\{A_n : n \geq 1\}$ στοιχεία της $\mathcal{A}$ για τα οποία ισχύει $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i) = \infty$ και υπάρχει $C \in (0, \infty)$ ώστε

$$\mathbf{P}(A_i \cap A_j) \leq C\, \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(A_j)$$

για κάθε $i, j \geq 1$. Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{P}(\limsup_n A_n) \geq 1/C > 0.$$

Συγκλιση τυχαιων μεταβλητων

3.1. Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών καθεμία με την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,1)$. Για κάθε $n\geq 1$ θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές

$$m_n = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\},$$
$$M_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}.$$

Να δειχθεί ότι $m_n \to 0$ και $M_n \to 1$

(α) κατά πιθανότητα,

(β) με πιθανότητα 1

καθώς $n\to\infty$.

3.2. Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών ώστε

$$\mathbf{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n}, \mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Να δειχθεί ότι

(α) $X_n \to 0$ κατά πιθανότητα (το γράφουμε και $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$) καθώς $n\to\infty$,

(β) αλλά δεν ισχύει $X_n \to 0$ σχεδόν βεβαίως. Μάλιστα $\mathbf{P}(\lim_{n\to\infty} X_n = 0) = 0$, δηλαδή σχεδον βεβαίως η X_n δεν συγκλίνει στο 0.

3.3. Έστω $(X_i)_{i\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, με $EX_1^+ = \infty, EX_1^- < \infty$. Να δειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \infty.$$

3.4. Έστω $(U_i)_{i\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών (στον ίδιο χώρο πιθανότητας), καθεμία με κατανομή $U(0,1)$, δηλαδή ομοιόμορφη στο $(0,1)$. Να δειχθεί ότι

(α) $\lim_{n\to\infty}(U_1U_2\cdots U_n)^{1/n} = e^{-1}$ με πιθανότητα 1.

(β) $\lim_{n\to\infty} U_1U_2\cdots U_n = 0$ με πιθανότητα 1.

(γ) $\lim_{n\to\infty} \frac{U_1^a+\cdots+U_n^a}{n} = \begin{cases} \frac{1}{1+a} & \text{με πιθανότητα 1 αν } a > -1, \\ \infty & \text{με πιθανότητα 1 αν } a \leq -1. \end{cases}$

3.5. Έστω $(X_i)_{i\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών (στον ίδιο χώρο πιθανότητας), με $\mu = \mathbf{E}(X_1) \in \mathbb{R}$ και $\sigma^2 = V(X_1) < \infty$. Να δειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (X_k - \mu)^2 = \sigma^2 \text{ με πιθανότητα 1.}$$

Ένα χρήσιμο όριο. Αν $(c_n)_{n\geq 1}$ είναι μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών με $\lim_{n\to\infty} nc_n = a \in \mathbb{C}$ (και άρα $c_n \to 0$), τότε

$$\lim_{n\to\infty} (1 + c_n)^n = e^a.$$

3.6. (α) Έστω X τυχαία μεταβλητή με κατανομή εκθετική με παράμετρο $a > 0$. Να υπολογιστεί η χαρακτηριστική συνάρτηση της X.

(β) Έστω Y τυχαία μεταβλητή με κατανομή γεωμετρική με παράμετρο $p\in(0,1]$. Δηλαδή

$$\mathbf{P}(Y = k) = p\,(1-p)^{k-1}$$

για $k = 1, 2, \ldots$. Να υπολογιστεί η χαρακτηριστική συνάρτηση της Y.

(γ) Έστω $a > 0$, και $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών ώστε η X_n να ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $p_n = a/n$. Να δειχθεί ότι η ακολουθία $(X_n/n)_{n\geq 1}$ συγκλίνει κατά κατανομή στην τυχαία μεταβλητή X του ερωτήματος (α), χρησιμοποιώντας

(i) τον χαρακτηρισμό της σύγκλισης κατά κατανομή μέσω συναρτήσεων κατανομής,
(ii) χαρακτηριστικές συναρτήσεις.

3.7. (α) Έστω X τυχαία μεταβλητή με κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda > 0$. Να υπολογιστεί η χαρακτηριστική συνάρτηση της X.

(β) Έστω Y τυχαία μεταβλητή με κατανομή διωνυμική με παραμέτρους $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, p \in [0, 1]$. Να υπολογιστεί η χαρακτηριστική συνάρτηση της Y.

(γ) Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών ώστε η X_n να ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτους $n, p_n \in (0, 1)$. Αν $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda$, να δειχθεί ότι η ακολουθία $(X_n)_{n\geq 1}$ συγκλίνει κατά κατανομή στην τυχαία μεταβλητή X του ερωτήματος (α).

3.8. Έστω $(X_i)_{i\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, με $EX_1 = 2, \mathrm{Var}(X_1) = 1$. Θέτουμε $S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ για κάθε $n \geq 1$. Να υπολογιστούν τα όρια

(α) $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(S_n > 2.1n)$,

(β) $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(S_n > 2n + \sqrt{n})$,

(γ) $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(S_n > 10\sqrt{n})$,

(δ) $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(S_n < 3n)$,

(ε) $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(S_n > 10^{10})$.

3.9. Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $\mathrm{Var}(X_1) = 1$. Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - (X_{n+1} + \cdots + X_{2n})}{\sqrt{n}}\right| \leq 1\right).$$

3.10. Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $\mathbf{E}(X_1) = 0$, $\mathrm{Var}(X_1) = 1$. Να δειχθεί ότι

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \infty.$$

[Υποδ.: Η στρατηγική της Άσκησης 2.12 λειτουργεί. Απλώς το μέρος α) χρειάζεται μια μικρή τροποποίηση.]

3.11. Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών που συγκλίνει κατά κατανομή σε μία τυχαία μεταβλητή X. Για καθένα από τα ακόλουθα ζεύγη κατανομής για την X και συνόλου $A \subset \mathbb{R}$, συνεπάγεται η σύγκλιση κατά κατανομή $X_n \Rightarrow X$ την

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n \in A) = \mathbf{P}(X \in A)?$$

	Κατανομή της X	ΣύνολοA
(i)	$Poisson(2)$,	$(2, 32.1) \cup \{100\}$
(ii)	$Poisson(2)$,	$\mathbb{Q}$
(iii)	Γεωμετρική$(1/3)$,	$(-1.5, 2.8)$
(iv)	$N(0,1)$	$(-2, \pi)$
(v)	$U(0,1)$	$(0, 1/3) \setminus \mathbb{Q}$
(vi)	Bernouli$(2/5)$ στο $\{0,1\}$	$(0, 1/2) \cup (2, 4)$

3.12*. Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ισόνομων και ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών (με τιμές στο $\mathbb{R}$) ώστε η κατανομή της X_1 να μην είναι συγκεντρωμένη σε ένα σημείο (δηλαδή δεν υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ με $\mathbf{P}(X = c) = 1$). Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{P}(\lim_{n\to\infty} X_n \text{ υπάρχει }) = 0.$$

Απαντήσεις §1

1.2. Για την πρώτη ανισότητα έχουμε

$$\mathbf{P}(\liminf A_n) = \mathbf{P}(\cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\cap_{k=n}^{\infty} A_k) \le \varliminf_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n).$$

Αυτό γιατί η ακολουθία $B_n := \cap_{k=n}^{\infty} A_k$ είναι φθίνουσα, και $B_n \subset A_n$. Η ανισότητα

$$\varlimsup_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) \le \mathbf{P}(\limsup A_n)$$

αποδεικνύεται όμοια.

1.3. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε $X^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{A}$. Άρα από την υπόθεση έχουμε

$$F(x) = \mathbf{P}(X \le x) = \mathbf{P}(X^{-1}((-\infty, x]) \in \{0, 1\}.$$

Επειδή η F είναι αύξουσα με $F(-\infty) = 0$ και $F(\infty) = 1$, έπεται ότι υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε $F(x) = 0$ για $x < c$ και $F(x) = 1$ για $x \ge c$. Τότε $\mathbf{P}(X = c) = F(c) - F(c-) = 1$.

1.4.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x - r_n|}}\,dx \le 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx < \infty$$

Από γνωστή πρόταση έπεται ότι το σύνολο των $x \in (0, 1)$ όπου $f(x) = \infty$ έχει μέτρο Lebesgue 0.

1.5. Η ακολουθία $A_n := \{|X| > n\}, n \ge 1$ είναι φθίνουσα με τομή το $\emptyset$ αφού η X παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}$. Άρα $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0$.

1.7. $[X] \le X \le 1 + [X]$ ενώ με βάση προηγούμενη άσκηση έχουμε

$$\mathbf{E}([X]) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}([X] \ge k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(X \ge k).$$

1.9. (α) $\Rightarrow$ (β). Για τα ω στο σύνολο $\limsup_n A_n^{\varepsilon}$ έχουμε $|X_n| \ge \varepsilon$ για άπειρα n, και άρα $\limsup_n A_n^{\varepsilon} \subset \Omega \setminus \{\lim_{n\to\infty} X_n = 0\}$.
(β) $\Rightarrow$ (α). Παρατηρούμε ότι $\Omega \setminus \{\lim_{n\to\infty} X_n = 0\} = \cup_{k=1}^{\infty} \limsup_n A_n^{1/k}$, και χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι **αριθμήσιμη** ένωση συνόλων με πιθανότητα 0 έχει πιθανότητα 0.

1.10 Ακριβώς όπως στην απόδειξη της ανισότητας Markov, για $t > 0$ έχουμε

$$t\,\mathbf{P}(|X| \ge t) \le \mathbf{E}(|X| \mathbf{1}_{|X|\ge t}).$$

Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε ακολουθία $t_n \to \infty$ ισχύει $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(|X| \mathbf{1}_{|X|\ge t_n}) = 0$. Αυτό προκύπτει από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, επειδή $\lim_{n\to\infty} |X| \mathbf{1}_{|X|\ge t_n} = 0$, με κυριαρχούσα συνάρτηση την $|X|$.

1.11 Για το (α), αρκεί να το δείξουμε για κάθε ακολουθία $(\varepsilon_n)_{n\ge1}$ θετικών αριθμών με $\varepsilon_n \to 0$. Χρησιμοποιούμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης με κυριαρχούσα συνάρτηση την 1 αφού

$$\left| \frac{X}{\varepsilon} \mathbf{1}_{X<\varepsilon} \right| \le 1.$$

1.12 Χρησιμοποιούμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz.

$$1 \le \mathbf{E}(\sqrt{XY}) \le (\mathbf{E}(X))^{1/2}(\mathbf{E}(Y))^{1/2}.$$

1.15 Χρησιμοποιούμε την προηγούμενη άσκηση.

Απαντήσεις §2

2.1. Έστω ότι δεν υπάρχει τέτοιο c. Τότε υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ ώστε $\mathbf{P}(X < a) = p \in (0,1)$ και επομένως $\mathbf{P}(X \ge a) = 1 - p \in (0,1)$. Η ανεξαρτησία δίνει

$$\mathbf{P}(X < a, Y \ge a) = \mathbf{P}(X < a)\mathbf{P}(Y \ge a) > 0,$$

ενώ το αριστερό μέλος είναι μικρότερο απο $\mathbf{P}(X \ne Y) = 0$ από υπόθεση. Άτοπο.

2.2. Πρώτο λήμμα Borel-Cantelli.

2.3. Η κατεύθυνση $\Leftarrow$ είναι πιο εύκολη. Αν υπάρχει τέτοιο M τότε (από το πρώτο λήμμα Borel-Cantelli) με πιθανότητα 1, ισχύει $X_n \le M$ για όλα τα μεγάλα n, και έπεται το συμπέρασμα.

[Να το γράψουμε και τυπικά. Το σύνολο $A := \limsup_{n\ge1}\{X_n > M\}$ έχει πιθανότητα 0, και για κάθε $\omega \in \Omega \setminus A$ υπάρχει φυσικός $n_0(\omega)$ ώστε $X_n \le M$ για κάθε $n \ge n_0(\omega)$. Άρα

$$X^*(\omega) \le \max\{X_1, X_2, \dots, X_{n_0(\omega)-1}, M\} < \infty,$$

ως μέγιστο πεπερασμένου αριθμού πραγματικών αριθμών.]

Για την άλλη κατεύθυνση, έστω ότι δεν υπάρχει τέτοιο M, τότε για κάθε $K \in \mathbb{N}$, το δεύτερο λήμμα Borel-Cantelli δίνει ότι $\mathbf{P}(\limsup_n\{X_n > K\}) = 1$ (εδώ χρησιμοποιούμε την ανεξαρτησία των X_n). Επομένως το $C_K := \{X^* \ge K\}$ έχει πιθανότητα 1, και άρα και το $\cap_{K=1}^{\infty} C_K$ (*αριθμήσιμη* τομή συνόλων με πιθανότητα 1). Όμως $\cap_{K=1}^{\infty} C_K = \{X^* = \infty\}$, το οποίο από υπόθεση έχει πιθανότητα 0, και έχουμε άτοπο.

2.4. Αρκεί για κάθε $n \ge 1$ να βρούμε σταθερά M_n ώστε $\mathbf{P}(|X_n| > M_n) \le n^{-2}$. Τότε η $a_n = nM_n$ ικανοποιεί το ζητούμενο (πρώτο Λήμμα Borel-Cantelli).

2.6. Δες σημειώσεις απο την τάξη.

2.7. Όμοια με την προηγούμενη άσκηση. Χρήσιμες είναι οι ανισότητες (1) της Άσκησης 1.1 του φυλλαδίου.

2.8. Το όριο είναι το πολύ 1 αφού κάθε μία X_i είναι το πολύ 1. Για το κάτω φράγμα, εφαρμόζουμε το πρώτο Λήμμα Borel-Cantelli. Για $\varepsilon > 0$, θέτουμε $A_n^{\varepsilon} := \{M_n \le 1 - \varepsilon\}$. Επειδή $\mathbf{P}(A_n^{\varepsilon}) \le (1-\varepsilon)^n$, και $\sum_{n\ge1}\mathbf{P}(A_n) < \infty$, με πιθανότητα 1 για όλα τα μεγάλα n ισχύει $M_n \ge 1 - \varepsilon$. Άρα το σύνολο $B_\varepsilon := \{\underline{\lim}_{n\to\infty} M_n \ge 1 - \varepsilon\}$ έχει πιθανότητα 1, και επομένως το ίδιο ισχύει και για το $\cap_{k=1}^{\infty} B_{1/k} = \{\underline{\lim}_{n\to\infty} M_n \ge 1\}$.

Εναλλακτικά, μπορεί να παρατηρήσει κανείς ότι $\mathbf{P}(A_n^{1/\sqrt{n}}) = (1 - n^{-1/2})^n \le e^{-\sqrt{n}}$ (με χρήση της $1 - x \le e^{-x}$), και $\sum_{n\ge1} e^{-\sqrt{n}} < \infty$. Το συμπέρασμα έπεται από το πρώτο Λήμμα Borel-Cantelli.

2.9. Το όριο είναι το πολύ 1 λόγω της Άσκησης 2.6. Για το κάτω φράγμα, εφαρμόζουμε το πρώτο Λήμμα Borel-Cantelli. Για $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\left(\frac{M_n}{\log n} \le 1 - \varepsilon\right) = \mathbf{P}(X_1 \le (1-\varepsilon)\log n)^n = (1 - n^{-(1-\varepsilon)})^n \le (e^{-n^{\varepsilon-1}})^n = e^{-n^{\varepsilon}},$$

και συνεχίζουμε όπως στην προηγούμενη άσκηση.

2.10. Εφαρμόζουμε την Άσκηση 1.7, για την τυχαία μεταβλητή $\varepsilon|X_1|$ για κάθε $\varepsilon > 0$, και χρησιμοποιούμε τα λήμματα Borel-Cantelli.

2.12. Δες σημειώσεις από την τάξη.

2.13. (β) Από το προηγούμενο ερώτημα, οι $(X_i)_{i\in I}$ είναι ανεξάρτητες. Άρα ο νόμος 0-1 του Kolmogorov εφαρμόζεται για την τελική σ-αλγεβρα τους

$$\mathcal{C}_\infty := \cap_{n=1}^\infty \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots).$$

Βέβαια το αν ένα $\omega \in \Omega$ ανήκει σε ένα από τα $\liminf A_i, \limsup A_i$ δεν εξαρτάται από οποιαδήποτε πεπερασμένο πλήθος $X_1(\omega), \ldots, X_k(\omega)$, οπότε και τα δύο σύνολα ανήκουν στην $\mathcal{C}_\infty$. Τυπικά το αποδεικνύουμε ως εξής. Για κάθε $n \geq 1$,

$$\liminf_i A_i = \cup_{j=1}^\infty \cap_{k=j}^\infty A_k = \cup_{j=n}^\infty \cap_{k=j}^\infty A_k = \cup_{j=n}^\infty \cap_{k=j}^\infty X_k^{-1}(\{1\}) \in \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots).$$

Η δεύτερη ισότητα ισχύει γιατί έχουμε ένωση μιας αύξουσας ακολουθίας συνόλων. Όμοια

$$\limsup_i A_i = \cap_{j=1}^\infty \cup_{k=j}^\infty A_k = \cap_{j=n}^\infty \cup_{k=j}^\infty A_k = \cap_{j=n}^\infty \cup_{k=j}^\infty X_k^{-1}(\{1\}) \in \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots).$$

2.14. (α) Από τον απειροστικό λογισμό ξέρουμε ότι $R^{-1} = \overline{\lim}_{n\to\infty} |X_n|^{1/n}$.

(β) Δείχνουμε όπως στην Άσκηση 2.6 ότι $\overline{\lim}_{n\to\infty} |X_n|^{1/n} = 1$ με πιθανότητα 1. Μάλιστα εδώ αρκεί η χρήση του πρώτου λήμματος Borel-Cantelli για να δείξουμε ότι $\lim_{n\to\infty} |X_n|^{1/n} = 1$.

2.16. Δουλεύουμε όπως στην προηγούμενη άσκηση.

Απαντήσεις §3

3.1. Για $\varepsilon > 0$, χρησιμοποιώντας την ανεξαρτησία των $X_1, X_2, \ldots$, βρίσκουμε

$$\mathbf{P}(|m_n| > \varepsilon) = \mathbf{P}(m_n > \varepsilon) = \mathbf{P}(X_1 > \varepsilon, \ldots, X_n > \varepsilon) = (1-\varepsilon)^n \to 0,$$

και όμοια

$$\mathbf{P}(|M_n - 1| > \varepsilon) = \mathbf{P}(M_n < 1-\varepsilon) = \mathbf{P}(X_1 < 1-\varepsilon, \ldots, X_n < 1-\varepsilon) = (1-\varepsilon)^n \to 0.$$

Έτσι έχουμε το μέρος (α) της άσκησης. Για το (β) δουλεύουμε όπως στην Άσκηση 2.8.

3.2. Βλέπε σημειώσεις από την τάξη.

3.3. Βλέπε σημειώσεις από την τάξη.

3.4. (α) $(U_1U_2\cdots U_n)^{1/n} = e^{\frac{1}{n}(\log U_1 + \cdots + \log U_n)}$ Επειδή $\mathbf{E}(\log U_1) = \int_0^1 \log x\, dx = \ldots = -1$, ο ισχυρός νόμος των μεγάλων αριθμών για την ακολουθία $(\log U_i)_{i\geq 1}$ δίνει ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log U_1 + \cdots + \log U_n}{n} = -1 \text{ με πιθανότητα } 1.$$

Το συμπέρασμα έπεται.

(β) Έπεται από το (α). Επιλέγουμε θ ώστε $e^{-1} < \theta < 1$. Με πιθανότητα 1, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για $n > n_0$ να ισχύει $(U_1U_2\cdots U_n)^{1/n} < \theta$. Άρα για $n > n_0$

$$0 < U_1U_2\cdots U_n < \theta^n \to 0$$

καθώς $n \to \infty$ επειδή $0 < \theta < 1$.

(γ) Η ακολουθία $(U_i^a)_{i\geq 1}$ αποτελείται από ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, καθεμία με μέση τιμή

$$\mathbf{E}(U_1^a) = \int_0^1 x^a\,dx = \begin{cases} \frac{1}{1+a} & \text{αν } a > -1, \\ \infty & \text{αν } a \leq -1. \end{cases}$$

Το συμπέρασμα έπεται από τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών.

3.5. Οι όροι της ακολουθίας $((X_i-\mu)^2)_{i\geq 1}$ είναι ανεξάρτητες ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, καθεμία με μέση τιμή $\mathbf{E}((X_1-\mu)^2) = V(X_1) = \sigma^2$. Ο ισχυρός νόμος των μεγάλων αριθμών δίνει το συμπέρασμα.

3.6. (α) Για $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\phi_X(t) = \mathbf{E}(e^{itX}) = a\int_0^\infty e^{itx}e^{-ax}\,dx = a\int_0^\infty e^{-(a-it)x}\,dx = \frac{a}{a-it}[-e^{-(a-it)x}]\Big|_{x=0}^{x=\infty} = \frac{a}{a-it}.$$

Χρησιμοποιήσαμε το ότι $\lim_{x\to\infty} e^{-(a-it)x} = \lim_{x\to\infty} e^{-ax}e^{itx} = 0$ αφού $a > 0$ και $|e^{itx}| = 1$ φραγμένη συνάρτηση του x.

(β) Για $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\phi_X(t) = \mathbf{E}(e^{itX}) = \sum_{k=1}^\infty e^{itk}(1-p)^{k-1}p = pe^{it}\sum_{j=0}^\infty (e^{it}(1-p))^j = \frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}.$$

Αθροίσαμε μια γεωμετρική πρόοδο της οποίας ο λόγος έχει μέτρο $|(1-p)e^{it}| = 1-p < 1$ αφού $p > 0$.

(γ) (i) Τα σημεία συνέχειας της συνάρτησης κατανομής F_X της X είναι όλο το $\mathbb{R}$. Έστω $x > 0$. Τότε

$$\begin{aligned} F_{X_n/n}(x) &= \mathbf{P}\left(\frac{X_n}{n} \leq x\right) = \mathbf{P}(X_n \leq [nx]) = 1 - \mathbf{P}(X_n > [nx]) \\ &= 1-(1-p_n)^{[nx]} = 1 - \left(\left(1-\frac{a}{n}\right)^n\right)^{[nx]/n}. \end{aligned}$$

Επειδή $[nx]/n \to x$ και $(1-an^{-1})^n \to e^{-a}$, έπεται ότι $\lim_{n\to\infty} F_{X_n/n}(x) = 1 - e^{-ax} = F_X(x)$. Προφανώς το ίδιο ισχύει και για $x \leq 0$.

(ii) Για $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\phi_{X_n/n}(t) = \phi_{X_n}(t/n) = \frac{p_n e^{it/n}}{1-(1-p_n)e^{it/n}} = \frac{e^{it/n}}{\frac{1-e^{it/n}}{a/n} + e^{it/n}} \to \frac{1}{1-\frac{it}{a}} = \phi_X(t)$$

καθώς $n \to \infty$ αφού

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-e^{it/n}}{a/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{it}{a}\frac{1-e^{it/n}}{it/n} = -\frac{it}{a}.$$

Άρα η σύγκλιση $X_n/n \Rightarrow X$ (δηλαδή σύγκλιση κατά κατανομή) έπεται από γνωστό θεώρημα.

3.7. (α) Για $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\phi_X(t) = \mathbf{E}(e^{itX}) = \sum_{k=0}^\infty e^{itk}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^\infty \frac{(e^{it}\lambda)^k}{k!} = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

(β) Για $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\phi_X(t) = \mathbf{E}(e^{itX}) = \sum_{k=0}^{n} e^{itk}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(pe^{it})^k(1-p)^{n-k}(pe^{it}+1-p)^n.$$

(γ) Για $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\phi_{X_n}(t) = (p_n e^{it} + 1 - p_n)^n = (1 + p_n(e^{it}-1))^n \to e^{\lambda(e^{it}-1)} = \phi_X(t)$$

αφού $\lim_{n\to\infty} p_n(e^{it}-1)n = \lambda(e^{it}-1)$. Άρα η σύγκλιση $X_n \Rightarrow X$ έπεται από γνωστό θεώρημα.

3.8. Για την ακολουθία $(S_n)_{n\geq 1}$ έχουμε ότι $S_n/n \to 2$ κατά πιθανότητα (ασθενής νόμος των μεγάλων αριθμών) και

$$\frac{S_n - 2n}{\sqrt{n}} \Rightarrow Z \sim N(0,1)$$

(κεντρικό οριακό θεώρημα).

(α) Η σύγκλιση $S_n/n \to 2$ κατά πιθανότητα δίνει

$$\mathbf{P}(S_n > 2.1n) = \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} > 2.1\right) \leq \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - 2\right| > 0.1\right) \to 0$$

καθώς $n \to \infty$.

(β) Έχουμε

$$\mathbf{P}(S_n > 2n + \sqrt{n}) = \mathbf{P}\left(\frac{S_n - 2n}{\sqrt{n}} > 1\right) \to \mathbf{P}(Z > 1) = 1 - \Phi(1)$$

καθώς $n \to \infty$ λόγω του κεντρικού οριακού θεωρήματος.

(γ) Ξέρουμε ότι $S_n \sim 2n$, άρα το ενδεχόμενο $S_n > 10\sqrt{n}$ είναι πολύ πιθανό. Τυπικά προχωρούμε ως εξής.

$$\mathbf{P}(S_n > 10\sqrt{n}) = P\left(\frac{S_n}{n} > \frac{10}{\sqrt{n}}\right) = 1 - P\left(\frac{S_n}{n} \leq \frac{10}{\sqrt{n}}\right).$$

Για $n > 100$,

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq \frac{10}{\sqrt{n}}\right) \leq \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - 2\right| > 1\right) \to 0$$

Άρα $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(S_n > 10\sqrt{n}) = 1$.

(δ)

$$\mathbf{P}(S_n \geq 3n) = \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq 3\right) \leq \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - 2\right| > \frac{1}{2}\right) \to 0$$

καθώς $n \to \infty$. Άρα $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(S_n < 3n) = 1$.

(ε) Για $n > 10^{10}$ έχουμε

$$\mathbf{P}(S_n \leq 10^{10}) = \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq \frac{10^{10}}{n}\right) \leq \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - 2\right| > \frac{1}{2}\right) \to 0$$

καθώς $n \to \infty$. Άρα $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(S_n > 10^{10}) = 1$.

3.9. Έστω ακολουθίες $(Y_n)_{n\geq 1}, (Z_n)_{n\geq 1}$ τυχαίες μεταβλητές στον ίδιο χώρο πιθανότητας ώστε οι $\{Y_n, Z_n : n \geq 1\}$ να είναι ανεξάρτητες και ισόνομες και καθεμία να έχει την ίδια κατανομή με την X_1.

Τότε επειδή το διάνυσμα $(X_1, \cdots, X_{2n})$ έχει την ίδια κατανομή με το $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - (X_{n+1} + \cdots + X_{2n})}{\sqrt{n}}\right| \le 1\right) \\
&\quad = \mathbf{P}\left(\left|\frac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n - (Z_1 + \cdots + Z_n)}{\sqrt{n}}\right| \le 1\right) = \mathbf{P}\left(\left|\frac{W_1 + W_2 + \cdots + W_n}{\sqrt{n}}\right| \le 1\right),
\end{aligned}$$

όπου θέσαμε $W_i = Y_i - Z_i$ για κάθε $i \ge 1$. Από την υπόθεση, οι $\{W_i : i \ge 1\}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, καθεμία με μέση τιμή $\mathbf{E}(W_1) = 0$ και διασπορά $V(W_1) = V(X_1) + V(Y_1) - 2\mathrm{Cov}(X_1, Y_1) = 1 + 1 - 0 = 2$. Άρα, εφαρμόζοντας το κεντρικό οριακό θεώρημα, βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{W_1 + W_2 + \cdots + W_n}{\sqrt{n}}\right| \le 1\right) &= \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{W_1 + W_2 + \cdots + W_n}{\sqrt{n2}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \mathbf{P}(|Z| \le 1/\sqrt{2}) = \Phi(1/\sqrt{2}) - \Phi(1/\sqrt{2}) \\
&= 2\Phi(1/\sqrt{2}) - 1.
\end{aligned}$$

3.11. Η σύγκλιση $X_n \Rightarrow X$ συνεπάγεται (μάλιστα ισοδυναμεί με) την

$$\mathbf{P}(X_n \in A) \to \mathbf{P}(X \in A) \text{ για όλα τα } A \subset \mathbb{R} \text{ Borel με } \mathbf{P}(X \in \partial A) = 0.$$

Είναι δυνατόν βέβαια η σχέση $\mathbf{P}(X_n \in A) \to \mathbf{P}(X \in A)$ να ισχύει για ένα σύνολο Borel A συμπτωματικά, ίσως εξαιτίας της φύσης της ακολουθίας $(X_n)_{n\ge1}$. Πάντως δεν μας την εγγυάται η $X_n \Rightarrow X$.

(i) Όχι. Γιατί $\partial A = \{2, 32.1, 100\}$, στο οποίο η κατανομή της X δίνει θετική πιθανότητα αφού περιέχει τους θετικούς ακέραιους $2, 100$.

(ii) Όχι. Γιατί $\partial A = \bar{A} \setminus A^o = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$, και $\mathbf{P}(X \in \mathbb{R}) = 1 > 0$.

(iii) Ναι. Γιατί $\partial A = \{-1.5, 2.8\}$ και $\mathbf{P}(X \in \{-1.5, 2.8\}) = 0$, αφού μια γεωμετρική τυχαία μεταβλητή παίρνει μόνο ακέραιες θετικές τιμές.

(iv) Ναι. Γιατί $\partial A = \{-2, \pi\}$ και $\mathbf{P}(X \in \partial A) = 0$ αφού η X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή και το ∂A είναι πεπερασμένο.

(v) Όχι. Γιατί $\partial A = \bar{A} \setminus A^o = [0, 1/3] \setminus \emptyset = [0, 1/3]$, και $\mathbf{P}(X \in [0, 1/3]) = 1/3 > 0$.

(vi) Όχι. Γιατί $\partial A = \{0, 1/2, 2, 4\}$, και $\mathbf{P}(X \in \{0, 1/2, 2, 4\}) = \mathbf{P}(X = 0) = 3/5 > 0$.