Πιθανότητες ΙΙ

Ενδιάμεση εξέταση. 1 Απριλίου 2023

1. (15 Βαθμοί) Έστω

$$\mathcal{C} := \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : A \text{ πεπερασμένο ή } \mathbb{R}\backslash A \text{ πεπερασμένο}\}.$$

(α) Είναι η $\mathcal{C}$ σ-άλγεβρα στο $\mathbb{R}$;
(β) Ποια είναι η παραγόμενη σ-άλγεβρα $\sigma(\mathcal{C})$;

2. (25 Βαθμοί) (α) Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $(A_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{F}$. Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{P}(\liminf_{n\geq 1} A_n) \leq \varliminf_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n).$$

Δώστε παράδειγμα χώρου και ακολουθίας όπου ισχύει γνήσια ανισότητα.
(β) Κατασκευάστε ακολουθία $(A_n)_{n\geq 1}$ υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ με $\liminf_{n\geq 1} A_n = [0, \infty)$, $\limsup_{n\geq 1} A_n = \mathbb{R}$.

3. (15 Βαθμοί) (α) Έστω $(\Omega, \mathcal{F}), (E, \mathcal{E})$ μετρήσιμοι χώροι και $g : \Omega \to E$ συνάρτηση. Πότε λέμε ότι η g είναι $\mathcal{F}/\mathcal{E}$-μετρήσιμη;
(β) Έστω $(\Omega, \mathcal{F})$ μετρήσιμος χώρος. Δείξτε ότι για $g : \Omega \to \mathbb{R}$, η g είναι $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-μετρήσιμη αν και μόνο αν $g^{-1}((a, b)) \in \mathcal{F}$ για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$.

4. (10 Βαθμοί) Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}$ και $\mathbf{E}(X^2) < \infty$.
Να δειχθεί ότι $\lim_{t\to\infty} t^2 \mathbf{P}(|X| > t) = 0$.

5. (10 Βαθμοί) Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $(0, \infty)$ και $1 < \mathbf{E}(X) < \infty, \mathbf{E}(X|\log X|) < \infty$. Να δειχθεί ότι $\mathbf{E}(X \log X) > 0$.

6. (20 Βαθμοί) Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $[0, \infty)$.
(α) Να δειχθεί ότι ισχύει

$$\mathbf{E}(X) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(X \geq k).$$

(β) Να δειχθεί ότι αν στην προηγούμενη ανισότητα τα δύο μέλη είναι ίσα και πεπερασμένα, τότε με πιθανότητα 1 η X παίρνει τιμές στο $\mathbb{N}$ $(= \{0, 1, 2, ...\})$.

7. (15 Βαθμοί) Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^2 \, dx.$$

Οι απαντήσεις να είναι πλήρως αιτιολογημένες.

Άριστα είναι το 100. **Καλή επιτυχία!**

Απαντήσεις

1. (α) Η $\mathcal{C}$ δεν είναι κλειστή στις αριθμήσιμες ενώσεις, άρα δεν είναι σ-αλγεβρα.
(β) $\sigma(\mathcal{C}) = \{A \subset \mathbb{R} : A$ αριθμήσιμο ή $\mathbb{R}\backslash A$ αριθμήσιμο$\}$.

4. (β) $t^2\mathbf{P}(|X| > t) \leq \mathbf{E}(X^2 \mathbf{1}_{|X|>t})$. Με χρήση του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης δείχνουμε ότι το δεξί μέλος τείνει στο 0.

5. Εφαρμόζουμε την ανισότητα Jensen στην κυρτή συνάρτηση $\phi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $\phi(x) = x \log x$.

$$\mathbf{E}(\phi(X)) \geq \phi(\mathbf{E}(X)) > 0$$

αφού $\phi(x) > 0$ για $x > 1$.

6. (α) Το δεξί μέλος της ανισότητας ισούται με $\mathbf{E}([X])$, οπότε η ανισότητα έπεται από την $[X] \leq X$.
(β) Θα έχουμε $\mathbf{E}(X - [X]) = 0$. Επειδή $X - [X] \geq 0$ για όλα τα $\omega \in \Omega$ έπεται ότι $\mathbf{P}(X - [X] = 0) = 1$, άρα η X παίρνει τιμές στο $\mathbb{N}$.

7. Το δοσμένο ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int_0^\infty \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^2 \mathbf{1}_{[0,n]}(x)\, dx.$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης. Κυριαρχούσα συνάρτηση η $g(x) := e^{-x}x^2$ γιατί για $x \in [0, n]$ έχουμε

$$0 \leq 1 - \frac{x}{n} \leq e^{-x/n} \Rightarrow \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}.$$

Επίσης, $\int_0^\infty e^{-x}x^2\, dx < \infty$. Τελικά το όριο είναι

$$\int_0^\infty e^{-x}x^2\, dx = \dots = 2$$

με ολοκλήρωση κατά μέρη.