Πιθανότητες ΙΙ

Ενδιάμεση εξέταση, 16 Απριλίου 2016

1. (10 Βαθμοί) Έστω $C := \sigma(\{(-\infty, q) : q \in \mathbb{Q}\})$ σ-άλγεβρα στο $\mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι $(-\infty, x] \in C$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2. (20 Βαθμοί) Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $(A_n)_{n\geq 1}$ στοιχεία της $\mathcal{F}$.
(α) Αν $\mathbf{P}(A_n) = 1$ για κάθε $n \geq 1$ να δειχθεί ότι $\mathbf{P}(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$.
(β) Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{P}(\limsup_{n\geq 1} A_n) \geq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \mathbf{P}(A_n)$$

και να δοθεί παράδειγμα μέτρου $\mathbf{P}$ και ακολουθίας $(A_n)_{n\geq 1}$ ώστε να ισχύει γνήσια ανισότητα.

3. (15 Βαθμοί) Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $H : \mathbb{R} \to [0, 1]$ με $H(t) := \mathbf{P}(X < t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ έχει τις εξής ιδιότητες:
(α) Είναι αύξουσα.
(β) Είναι αριστερά συνεχής.
(γ) $H(-\infty) = 0, H(\infty) = 1$.

4. (15 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία πραγματικών τυχαίων μεταβλητών σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Να δειχθεί ότι $X_n \to 0$ κατά πιθανότητα αν και μόνο αν $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(1 \wedge |X_n|) = 0$.

5. (15 Βαθμοί) Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{n\to\infty} \int_1^{\infty} f_n(x)\, dx$ στην περίπτωση που
(α) $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1+nx^3}$.
(β) $f_n(x) = \frac{1}{1+nx} \mathbf{1}_{[1,e^n]}(x)$.

6. (10 Βαθμοί) Να δειχθεί ότι

$$\int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin(nx)}{2^n}\, dx = \frac{4}{3}.$$

7. (20 Βαθμοί) (α) Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $[0, \infty)$. Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E}(X) = \int_0^{\infty} \mathbf{P}(X \geq t)\, dt.$$

(β) Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}$ για την οποία ορίζεται η $\mathbf{E}(X)$. Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E}(X) = \int_0^{\infty} \mathbf{P}(X \geq t)\, dt - \int_{-\infty}^{0} \mathbf{P}(X \leq t)\, dt.$$

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι $2\frac{1}{2}$ ώρες.

Καλή επιτυχία!

Απαντήσεις

1. Θεωρούμε ακολουθία ρητών $(q_n)_{n\geq 1}$ που συγκλίνει στο x αλλά ώστε $q_n > x$ για κάθε n. Τότε

$$(-\infty, x] = \cap_{n=1}(-\infty, q_n).$$

Το δεξί μέλος είναι αριθμήσιμη τομή στοιχείων της C (αυτά είναι μάλιστα από τα στοιχεία που παράγουν την C) , η οποία ως σ-άλγεβρα πρέπει να περιέχει αυτή την τομή.

3. Ανάλογη απόδειξη με αυτήν για την συνάρτηση κατανομής, $\mathbf{P}(X \leq t)$, που είναι στις σημειώσεις.

4. «⇒» Ένας τρόπος. Για κάθε $\varepsilon \in (0, 1)$ έχουμε

$$1 \wedge |X_n| = \{1 \wedge |X_n|\}\mathbf{1}_{|X_n|\leq\varepsilon} + \{1 \wedge |X_n|\}\mathbf{1}_{|X_n|>\varepsilon} \leq \varepsilon + \mathbf{1}_{|X_n|>\varepsilon}.$$

Παίρνοντας μέση τιμή έχουμε $\mathbf{E}(1 \wedge |X_n|) \leq \varepsilon + \mathbf{P}(|X_n| > \varepsilon)$, άρα $\overline{\lim}_{n\to\infty} \mathbf{E}(1 \wedge |X_n|) \leq \varepsilon$. Για $\varepsilon \to 0$ προκύπτει το ζητούμενο.

«⇐» Για οποιοδήποτε $\varepsilon \in (0, 1)$ έχουμε

$$\mathbf{P}(|X_n| > \varepsilon) \leq \mathbf{P}(1 \wedge |X_n| > \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{E}((1 \wedge |X_n|)}{\varepsilon} \to 0$$

για $n \to \infty$.

Στη σύγκλιση κατά πιθανότητα αρκεί κανείς να ελέγξει τον ορισμό για μικρά ε. Εδώ για παράδειγμα μπορούμε να πούμε ότι για $\varepsilon \geq 1$ έχουμε $\mathbf{P}(|X_n| > \varepsilon) \leq \mathbf{P}(|X_n| > 1/2)$ και η $\mathbf{P}(|X_n| > 1/2)$ τείνει στο 0 όπως δείξαμε πιο πρίν.

5. (α) Εφαρμόζουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης. Κυριαρχούσα συνάρτηση η $g(x) = x^{-3}\mathbf{1}_{x\geq 1}$. Το όριο είναι 0. Το ίδιο αποδεικνύεται και στοιχειωδώς.

(β) Το όριο είναι 1 γιατί το ολοκλήρωμα ισούται με

$$\frac{1}{n}\{\log(1 + ne^n) - \log(1 + n)\}.$$

Το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης δεν μπορεί να εφαρμοστεί.

6. Θεώρημα Fubini.

7. (α) Ειδική περίπτωση της 9.2(α) των σημειώσεων.
(β) Από το (α) έχουμε

$$\mathbf{E}(X^+) = \int_0^\infty \mathbf{P}(X^+ \geq t)\,dt = \int_0^\infty \mathbf{P}(X \geq t)\,dt,$$
$$\mathbf{E}(X^-) = \int_0^\infty \mathbf{P}(X^- \geq t)\,dt = \int_0^\infty \mathbf{P}(-X \geq t)\,dt \overset{y=-t}{=} \int_{-\infty}^0 \mathbf{P}(X \leq y)\,dy$$

Στην πρώτη γραμμή, για τη δεύτερη ισότητα, αν $X^+ > t > 0$ τότε αναγκαστικά $X^+ = X$. Όμοια δικαιολογούμε την δεύτερη ισότητα στη δεύτερη γραμμή.
Από υπόθεση, τουλάχιστον ένα από τα $\mathbf{E}(X^-)$, $\mathbf{E}(X^+)$ είναι πεπερασμένα. Έτσι έχει νόημα η διαφορά

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(X^+) - \mathbf{E}(X^-) = ...$$