Πιθανότητες ΙΙ

Ενδιάμεση εξέταση. 30 Νοεμβρίου 2019

1. (15 Βαθμοί) Έστω $(\Omega, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $C \in \mathcal{A}$. Θέτουμε

$$\mathcal{F} := \{A \in \mathcal{P}(\Omega) : A \cap C \in \mathcal{A}\}$$

Να δειχθεί ότι η $\mathcal{F}$ είναι σ-άλγεβρα στο Ω και $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$.

2. (10 Βαθμοί) Ποια υποσύνολα του $\mathbb{R}$ λέμε Borel; Έστω $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ το σύνολο όλων αυτών των συνόλων και $\mathcal{A} := \{(-\infty, q) : q \in \mathbb{Q}\}$. Να δειχθεί ότι $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

3. (10 Βαθμοί) Για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$ θέτουμε

$$A_n := \begin{cases} [0,2] & \text{αν } n \text{ άρτιος,} \\ [1,2] & \text{αν } n \text{ περιττός.} \end{cases}$$

Να υπολογιστούν τα σύνολα $\liminf_{n\in\mathbb{N}^+} A_n, \limsup_{n\in\mathbb{N}^+} A_n$.

4. (15 Βαθμοί) Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_{20}$ τυχαίες μεταβλητές σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ και με τιμές στο $\mathbb{R}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $T : \Omega \to \mathbb{R}$ με

$$T(\omega) := 0 \vee \sup\{n \in \{1, 2, \ldots, 20\} : X_n(\omega) > 0\}$$

για κάθε $\omega \in \Omega$ (υπενθυμίζεται ότι $\sup \varnothing = -\infty$). Να δειχθεί ότι:
(α) Για κάθε $n \in \{1, \ldots, 20\}$ ισχύει $\{X_n > 0\} \in \mathcal{F}$.
(β) Για κάθε $n \in \{0, 1, \ldots, 20\}$ ισχύει $\{T = n\} \in \mathcal{F}$.
(γ) Η συνάρτηση T είναι τυχαία μεταβλητή.

5. (15 Βαθμοί) Πώς ορίζεται η συνάρτηση κατανομής, F, ενός μέτρου πιθανότητας $\mathbf{P}$ στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$; Για δεδομένα $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$, να εκφραστούν οι ποσότητες $\mathbf{P}([a, b)), \mathbf{P}((a, b)), \mathbf{P}((-\infty, a))$ με τη βοήθεια της F (Να αποδειχθούν οι εκφράσεις που θα δώσετε).

6. (10 Βαθμοί) Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{Z}$. Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E}(X^+) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(X \geqslant k).$$

7. (15 Βαθμοί) Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}$ και με $\mathbf{E}(e^{-X}) = 2$. Να δειχθεί ότι υπάρχει σταθερά $C \in (0, \infty)$ ώστε $\mathbf{P}(X < -t) \leqslant Ce^{-t}$ για κάθε $t > 0$.

8. (20 Βαθμοί) Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}$.
(α) Να δειχθεί ότι $\mathbf{E}|X| < \infty$ αν και μόνο αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $\mathbf{E}(|X|\mathbf{1}_{|X|>n}) < \infty$
(β) Να δειχθεί ότι το $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(|X|\mathbf{1}_{|X|>n})$ υπάρχει και είναι 0 ή ∞.

Άριστα είναι το 100. Καλή επιτυχία!

Απαντήσεις

3. $\liminf_{n\in\mathbb{N}^+} A_n = [1,2]$, $\limsup_{n\in\mathbb{N}^+} A_n = [0,2]$, γιατί ...

4. (α) $\{X_n > 0\} = X_n^{-1}((0,\infty)) \in \mathcal{F}$ αφού η X_n είναι μετρήσιμη και $(0,\infty) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
(β) Έστω $A_n := \{X_n > 0\}$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$. Τότε για κάθε $n = 1, \ldots, 20$ ισχύει

$$\{T = n\} = A_n \cap A_{n+1}^c \cap \cdots \cap A_{20}^c = A_n \cap \cap_{n<j\leqslant 20} A_j^c,$$

το οποίο είναι στοιχείο της $\mathcal{F}$ λόγω του (α) και του ότι η $\mathcal{F}$ είναι σ-άλγεβρα. Για $n = 0$,

$$\{T = 0\} = \cap_{j=1}^{20} A_j^c \in \mathcal{F}.$$

(γ) Για $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\{T \leqslant x\} = \begin{cases} \varnothing & \text{αν } x < 0, \\ \cup_{j=0}^{[x]} \{T = j\} & \text{αν } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Σε κάθε περίπτωση, το σύνολο $\{T \leqslant x\}$ είναι στοιχείο της $\mathcal{F}$ [με βάση το (β)], άρα η T είναι μετρήσιμη.

5. Άσκηση 4.3 στις σημειώσεις. Για την τρίτη πιθανότητα, γράφουμε

$$\mathbf{P}((-\infty, a)) = \mathbf{P}(\cup_{n=1}^{\infty}(-\infty, a - \frac{1}{n}]) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}((-\infty, a - n^{-1}]) = \lim_{n\to\infty} F(a - n^{-1}) = F(a-).$$

6. Ισχύει

$$X^+ = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{X\geqslant k}$$

οπότε το συμπέρασμα έπεται από το θεώρημα Bepo-Levi (παίρνουμε τη μέση τιμή του αθροίσματος)

7.

$$\mathbf{P}(X < -t) = \mathbf{P}(-X > t) = \mathbf{P}(e^{-X} > e^t) \leqslant \frac{1}{e^t}\mathbf{E}(e^{-X}) = 2e^{-t}.$$

Το ζητούμενο ισχύει με $C = 2$.

8. (α) Επειδή για οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$|X|\mathbf{1}_{|X|>n} \leqslant |X| \leqslant n + |X|\mathbf{1}_{|X|>n}$$

και $\mathbf{E}(n) = n$, έπεται το συμπέρασμα του (α).
(β) Αν $\mathbf{E}(|X|) < \infty$, τότε παρατηρούμε ότι[1]

- $\lim_{n\to\infty} |X|\mathbf{1}_{|X|>n} = 0$ για κάθε $\omega \in \Omega$,
- $||X|\mathbf{1}_{|X|>n}| \leqslant |X|$ για κάθε $\omega \in \Omega$ και κάθε $n \geqslant 1$,
- $\mathbf{E}(|X|) < \infty$.

Έτσι, το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης δίνει ότι

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(|X|\mathbf{1}_{|X|>n}) = \mathbf{E}(\lim_{n\to\infty} |X|\mathbf{1}_{|X|>n}) = 0.$$

Αν $\mathbf{E}(|X|) = \infty$, με βάση το (α), κάθε όρος $\mathbf{E}(|X|\mathbf{1}_{|X|>n}) = \infty$, οπότε και το όριο είναι άπειρο.

[1]Για την πρώτη σχέση, παίρνουμε $\omega \in \Omega$ και ας πούμε ότι $X(\omega) = -35.2$. Τότε, για $n \geqslant 36$ ισχύει $|X(\omega)|\mathbf{1}_{|X(\omega)|>n} = 0$. Γι' αυτό, το όριο είναι 0.