Πιθανότητες ΙΙ. Βασικά σημεία.

(1) Πώς δείχνουμε ότι μια οικογένεια συνόλων είναι σ-άλγεβρα;

(2) Πρόταση 2.5 και χρήσεις της. Ασκήσεις 2.3, 2.5, 2.6, 4.11, 5.10.

(3) Πως δείχνουμε ότι μια συνάρτηση $f : E \to G$ είναι μετρήσιμη ως προς δεδομένες σ-άλγεβρες $\mathcal{E}, \mathcal{G}$ στα πεδία ορισμού και τιμών;

(4) Σε ποια σενάρια ξέρουμε ότι σίγουρα ισχύει η σχέση

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\, d\mu(x) = \int \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, d\mu(x)\,;$$

(5) Ανισότητες Markov, Chebyshev. Η λογική της απόδειξης τους. Ασκήσεις 5.5, 5.6, 5.14, 12.1.

(6) Πως υπολογίζουμε μέσες τιμές και πιθανότητες που αφορούν τυχαίες μεταβλητές που είναι διακτριτές ή έχουν πυκνότητα;

(7) Λήμματα Borel-Cantelli.

(8) Πώς δείχνουμε ότι ένα σύνολο ανήκει στην τελική σ-άλγεβρα μιας ακολουθίας τυχαίων μεταβλητών;

Αν έχουμε ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(X_n)_{n\geq 1}$ και μια τυχαία μεταβλητή X, πως δείχνουμε ότι (για $n \to \infty$)

(9) $X_n \to X$ κατά πιθανότητα.

(10) $X_n \to X$ στον $\mathcal{L}^p$.

(11) $X_n \to X$ σχεδόν βέβαια.

(12) $X_n \Rightarrow X$ (σύγκλιση κατά κατανομή).

(13) Ποιες είναι οι χρήσεις της χαρακτηριστικής συνάρτησης μιας τυχαίας μεταβλητής;

Πώς συμπεριφέρεται το άθροισμα, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, ανεξάρτητων ισόνομων τυχαίων μεταβλητών; Ασκήσεις 11.16, 12.1-12.7, 16.1, 16.2, 16.7. Σχετικά θέματα εξετάσεων.

(3) Χρησιμοποιούμε τα αποτελέσματα της Παραγράφου 4.1.

(4) Θεώρημα μονότονης σύγκλισης, θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης. Για χώρους πεπερασμένου μέτρου, θεώρημα φραγμένης σύγκλισης.

(6) Πρόταση 6.9, σχέση (6.10), παράδειγμα 6.10.

(9) Κάνουμε ένα από τα εξής

  (α′) Για $\varepsilon > 0$, υπολογίζουμε την πιθανότητα $\mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$ αν ξέρουμε την κατανομή της (X_n, X), και δείχνουμε ότι τείνει στο 0.

  (β′) Για $\varepsilon > 0$, φράζουμε την πιθανότητα $\mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$ από κάτι που τείνει στο 0.

  (γ′) Δείχνουμε ότι $X_n \to X$ σχεδόν βέβαια ή στον $\mathcal{L}^p$ για κάποιο $p > 0$.

(10) Κάνουμε ένα από τα εξής:

  (α′) Υπολογίζουμε την $\mathbf{E}(|X_n - X|^p)$ και δείχνουμε ότι τείνει στο 0.

  (β′) Δείχνουμε ότι $X_n \to X$ σχεδόν βέβαια ή κατά πιθανότητα αλλά και ότι υπάρχει $Y \geq 0$ με $|X_n| \leq Y$ και $\mathbf{E}(Y^p) < \infty$, και έπειτα επικαλούμαστε το Θεώρημα 8.5.

(11) Κάνουμε ένα από τα εξής:

  (α′) Βλέπουμε αν προκύπτει από κάποιο αναλυτικό επιχείρημα που δεν έχει βάση πιθανοτική.

  (β′) Εξετάζουμε αν είναι συνέπεια του νόμου των μεγάλων αριθμών.

  (γ′) Χρησιμοποιούμε τα δυό λήμματα Borel-Cantelli.

(12) Κάνουμε ένα από τα εξής.

  (α′) Εφαρμόζουμε τον ορισμό. Δες Παραδείγματα 14.5, 14.6, και Άσκηση 14.2.

  (β′) Χρησιμοποιούμε χαρακτηριστικές συναρτήσεις (Παραδείγματα 15.5, 15.6. 15.7. Ασκήσεις 15.2-15.6).

(13) Χαρακτηρίζει την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής (Πόρισμα 13.6. Εφαρμογές στο Παράδειγμα 13.17 και στις Ασκήσεις 13.7-13.10). Αποδεικνύει σύγκλιση κατά κατανομή (Πόρισμα 15.3).