ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ "ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ"
ΙΟΥΝΙΟΣ 2011

1. Θεωρήστε μια κλασική διαδικασία Markov με ℓ καταστάσεις και πιθανότητες μετάβασης p^{kr}, $k=1,\dots,\ell$, $r=1,\dots,\ell$. Κάθε κατάσταση είναι ένα π.π. C^k, $k=1,\dots,\ell$, του οποίου την τιμή $val(C^k)$ συμβολίζουμε με u^k. Έστω τώρα το στοχαστικό παιχνίδι όπου σε κάθε στάδιο έχουμε τερματισμό με πιθανότητα $s>0$ ή διαφορετικά, εφόσον δεν τερματίζεται, έχουμε μετάβαση από το C^k στο C^r με πιθανότητα p^{kr}.

(α) Να δώσετε τις εξισώσεις Shapley για το στοχαστικό παιχνίδι.

(β) Να δείξετε ότι οι εξισώσεις του (α) αποτελούν ένα γραμμικό σύστημα (να δώσετε το σύστημα αυτό) και να προσδιορίσετε τις βέλτιστες στρατηγικές.

(γ) Γράψτε και λύστε τις εξισώσεις του (β) για

$$C^1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 2\end{pmatrix},\quad C^2=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -2 & 0\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/3 & 2/3\end{pmatrix},\quad s=\frac{6}{10}$$

Ποιές οι βέλτιστες στρατηγικές των παικτών (στάσιμες, στο στοχαστικό παιχνίδι).

2. (α) Έστω A και B δύο $n\times n$ πίνακες και θεωρήστε τα συμμετρικά δ.π.π. (A,A^T) και (B,B^T). Συμβολίστε με $BR_A^{I}(y)$ την αντιστοιχία βέλτιστης απάντησης του I στη μικτή στρατηγική y του II στο (A,A^T) και όμοια για τις $BR_A^{II}(x)$, $BR_B^{I}(y)$, $BR_B^{II}(x)$.

(i) Δώστε τις συνθήκες α' & β' τάξης για να είναι μια x^0 ΕΕΣ στο A.

(ii) Αν ο B αποτελεί μετασχηματισμό κλίμακας και θέσης του A, δηλ. αν $b_{ij}=ka_{ij}+c$, με $k>0$, $c\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι αν η x^0 ΕΕΣ στο A, τότε η x^0 είναι ΕΕΣ στο B.

(β) Εξετάστε το δ.π.π. "μάχη των 2 φύλων". Ποια από τα ΣΣΙ είναι αυστηρά; Υπάρχει ΕΕΣ;

3 Σε μια δημοπρασία συμμετέχουν n παίκτες. Θεωρούμε ότι οι αποτιμήσεις των παικτών για το δημοπρατούμενο αντικείμενο είναι τ.μ. $\sim U(0,1)$, στοχαστικά ανεξάρτητες (ο καθε ένας φυσικά γνωρίζει τη δική του αποτίμηση v_i, $i=1,\dots,n$). Οι παίκτες κάνουν ταυτόχρονα και ανεξάρτητα προσφορές b_i, $i=1,\dots,n$ και το αντικείμενο κατακυρώνεται σε όποιον έδωσε την υψηλότερη προσφορά (αν το $\max_{i=1,\dots,n} b_i$ παίρνεται σε περισσότερες από μία προσφορές, τότε γίνεται κλήρωση μεταξύ των πλειοδοτών για να αποφασισθεί σε ποιόν θα κατακυρωθεί). Να δείξετε ότι η στρατηγική κατά την οποία κάθε παίκτης προσφέρει $\frac{n-1}{n} \cdot v_i$, $i=1,\dots,n$, αποτελεί Μπεϋζιανό ΣΣΙ.

4 Θεωρήστε ολιγοπώλιο Cournot με n παίκτες και συνάρτηση αντίστροφης ζήτησης $p = a - \bar{q}$, όπου $\bar{q} := \sum_{i=1}^{n} q^i$. Εξετάζουμε το άπειρα επαναλαμβανόμενο παιχνίδι.

(a) Από ποιά τιμή του συντελεστή αποπληθωρισμού δ και πάνω οι στρατηγικές σκανδάλης του θεωρήματος Friedman μπορούν να δώσουν ΣΣΙ τέλειο ως προς τα υποπαιχνίδια στο άπειρα επαναλαμβανόμενο παιχνίδι, που να δημιουργεί μονοπώλιο;

(β) Έστω $\delta < \delta_0$, όπου δ_0 το κατώφλι που βρήκατε στο (a). Ποιο είναι το καλύτερο αποτέλεσμα που μπορούμε να πάρουμε ως ΣΣΙ τέλειο ως προς τα υποπαιχνίδια στο άπειρα επαναλαμβανόμενο παιχνίδι μέσω στρατηγικών σκανδάλης τότε; [οι πράξεις εδώ είναι επίπονες και μου αρκεί να προχωρήσετε ως εκεί που εμφανίζονται οι πολλές πράξεις. Αν αντέχετε, κάντε τις].

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ. ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ.