<u>Λύσεις των Θεμάτων του Διαγ/τος στην Τάξη και Σχόλια-Ιούνιος 2011</u>

<u>Θέμα 1 (Σχόλιο)</u>**:** Οι ερωτήσεις (α) και (β), που είναι και η ουσία του Θέματος (το (γ) αποτελεί εφαρμογή) είχαν ξαναζητηθεί πριν τρία χρόνια στα πλαίσια του «εύκολου» διαγωνίσματος στην τάξη του μεταπτυχιακού μαθήματος στη Θεωρία Παιγνίων (τότε το τελικό διαγώνισμα αποτελούνταν από ένα εύκολο κομμάτι στην τάξη και ένα δύσκολο στο σπίτι). Είχαν δώσει το διαγώνισμα 4 ή 5 μεταπτυχιακοί φοιτητές. Ο ένας έδωσε λευκή κόλλα και οι υπόλοιποι το απάντησαν σωστά. Φέτος απαντήθηκε σωστά από κανένα φοιτητή.

<u>Θέμα 1 (Λύση)</u>**:** Για να δώσουμε τις εξισώσεις Shapley πρέπει να εντοπίσουμε τις πιθανότητες μεταπήδησης και την πιθανότητα σταματήματος. Η ιδέα είναι ίδια με την Άσκηση 2 του Α Σετ Ασκήσεων, αλλά τώρα οι μαθηματικοί χειρισμοί είναι πολύ ευκολότεροι.

Η πιθανότητα σταματήματος s_{ij}^{k} του μοντέλου Shapley έχει δοθεί ότι είναι ανεξάρτητη των i, j, k και ίση με s. Επομένως, δεδομένου ότι εφ' όσον η διαδικασία δε σταματήσει οι μεταπηδήσεις γίνονται ανεξάρτητα από τις κινήσεις των παικτών και σύμφωνα με μια διαδικασία Markov, οι πιθανότητες μεταπήδησης του μοντέλου Shapley από την κατάσταση k στην κατάσταση r θα δίνονται από τις $(1-s)p^{kr}$. Φυσικά παρατηρούμε ότι $\sum_{r=1}^{l}(1-s)p^{kr}+s=1$, όπως είναι αναμενόμενο.

Σαν γενικό σχόλιο, επειδή στο σημείο αυτό υπήρξε δυσκολία (ανεξήγητη σ' εμένα αφού τόχαμε πει στην τάξη όταν συζητήσαμε την Άσκηση 2 του Α Σετ και φάνηκε να μην υπήρχαν απορίες), να ξεκαθαρίσουμε το θέμα και πάλι.

Στο μοντέλο Shapley υπάρχουν δύο τρόποι να δώσουμε τις πιθανότητες μεταπήδησης. Ο ένας είναι ο τρόπος του βιβλίου, μέσω <u>μη</u> δεσμευμένων πιθανοτήτων: Λέμε p_{ij}^{kr} τις πιθανότητες μετάβασης από την κατάσταση k στην κατάσταση r όταν οι παίκτες επιλέξουν τις κινήσεις i, j και ζητάμε να είναι $\sum_{r=1}^{l} p_{ij}^{kr} < 1$. Η πιθανότητα σταματήματος s_{ij}^{k} θα δίνεται τότε από την $s_{ij}^{k} := 1-\sum_{r=1}^{l} p_{ij}^{kr} > 0$. Προφανώς τώρα, η ίδια ιστορία μπορεί να περιγραφεί μέσω δεσμευμένων πιθανοτήτων. Μπορεί δηλαδή να δοθεί ότι η πιθανότητα μεταπήδησης από την κατάσταση k στην κατάσταση r *<u>δεδομένου</u>* ότι δεν υπήρξε σταμάτημα είναι η $\hat{p}_{ij}^{kr}$. Πώς συνδέονται οι μη δεσμευμένες με τις δεσμευμένες πιθανότητες; Προφανώς μέσω της σχέσης $\hat{p}_{ij}^{kr} = \dfrac{p_{ij}^{kr}}{1-s_{ij}^{k}}$ (απευθείας από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας).

Έτσι λοιπόν, στο Θέμα 1 έχουν δοθεί οι δεσμευμένες πιθανότητες, δηλαδή τώρα $\hat{p}_{ij}^{kr} = p^{kr}$ (το p^{kr} της εκφώνησης), από όπου αμέσως προκύπτει ότι $p_{ij}^{kr} = (1-s)p^{kr}$.

Ας έλθουμε λοιπόν στη λύση.

Από το Θεώρημα Shapley θα έχουμε ότι η τιμή του στοχαστικού παιχνιδιού $(v^1, v^2, \ldots, v^l)$ ικανοποιεί το σύστημα

$$v^k = \mathrm{val}\left[c_{ij}^k + (1-s)\sum_{r=1}^{l} p^{kr} v^r \right], \; k = 1,\ldots,l \qquad (1)$$

Δηλαδή (ξεχνώντας προς στιγμή το k), ψάχνουμε την τιμή ενός πίνακα της μορφής $[c_{ij} + \sigma\tau\alpha\theta]_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,l}}$. Γνωρίζουμε από τα στοιχειώδη ότι

$$\mathrm{val}[c_{ij} + \sigma\tau\alpha\theta] = \mathrm{val}[c_{\mathrm{ij}}] + \sigma\tau\alpha\theta$$

Επομένως, και αφού έχει δοθεί ότι $\mathrm{val}[c_{ij}^k] = u^k$, οι (1) γίνονται

$$v^k = u^k + (1-s)\sum_{r=1}^{l} p^{kr} v^r , \quad k = 1,\ldots,l \qquad (2)$$

Το (2) προφανώς αποτελεί ένα γραμμικό σύστημα ως προς τους αγνώστους $(v^1, v^2, \ldots, v^l)$.

Επίσης, από το Θεώρημα Shapley γνωρίζουμε ότι οι βέλτιστες στρατηγικές του π.π. (1) θα δίνουν τις βέλτιστες στάσιμες στρατηγικές των παικτών στο στοχαστικό παιχνίδι. Αλλά στην περίπτωσή μας (βλ. (2)), οι στρατηγικές αυτές συμπίπτουν με τις βέλτιστες στρατηγικές στα π.π. C^k, $k = 1,\ldots,l$.

Σαν εφαρμογή των παραπάνω λύνουμε το (γ) του Θέματος. Βρίσκουμε (αν δεν έχω κάνει λάθη στις πράξεις, διότι ουδείς έλυσε σωστά το (γ) αφού δεν υπήρξε σωστή λύση των (α) και (β) και έτσι δεν μπόρεσα να αντιπαραβάλω τις λύσεις) ότι

$$u^1 = 1/3 , \; x_0^1 = (5/6, 1/6) , \; y_0^1 = (1/3, 2/3)$$
$$u^2 = -2/5 , \; x_0^2 = (2/5, 3/5) , \; y_0^2 = (1/5, 4/5)$$

Και οι εξισώσεις γίνονται

$$v^1 = \tfrac{1}{3} + \tfrac{4}{10}\left(\tfrac{1}{2}v^1 + \tfrac{1}{2}v^2\right)$$
$$v^2 = -\tfrac{2}{5} + \tfrac{4}{10}\left(\tfrac{1}{3}v^1 + \tfrac{2}{3}v^2\right)$$

Λύνοντας βρίσκουμε $(v^1, v^2) = (\frac{89}{252}, \frac{-31}{63})$. Οι στάσιμες βέλτιστες στρατηγικές είναι φυσικά τα x_0^1, y_0^1, x_0^2, και y_0^2 που ήδη έχουν βρεθεί.

Θέμα 2 (Σχόλιο): Είμαι της γνώμης ότι πρόκειται για εύκολο θέμα. Το (α) στηρίζεται στη γνωστή ιδιότητα ότι αν x είναι $m \times 1$ διάνυσμα πιθανότητας, y είναι $n \times 1$ διάνυσμα πιθανότητας και $\mathbf{1}$ είναι ο $m \times n$ πίνακας με όλες τις συντεταγμένες του 1, τότε $x^T \mathbf{1}\, y = 1$. Ένα ευρύτατα διαδεδομένο λάθος ήταν να γράφεται $x^T x$, αντί για $x^T \mathbf{1}\, x$. Προφανώς όμως $x^T x = \|x\|^2 \neq 1$! Το (β) έβγαινε άμεσα από τους ορισμούς, αλλά χρειαζόταν το παιχνίδι να έρθει πρώτα στην τυπική συμμετρική του μορφή. Οι περισσότεροι δεν το έκαναν, με αποτέλεσμα να καταλήγουν σε αποτέλεσμα εντελώς αντίθετο από το ορθό. Το θέμα ουσιαστικά λύθηκε από ένα μόνο φοιτητή.

Θέμα 2 (Λύση): **(α)** Το (i) απευθείας από το βιβλίο. Για το (ii), αν είναι A και B $n \times n$ πίνακες, x και y $n \times 1$ διανύσματα πιθανότητας, και αν $B = kA + c\,\mathbf{1}$, $k > 0$ και $c \in \Re$, τότε

$$x \in \mathrm{BR}_A^I(y) \Leftrightarrow x \in \mathrm{BR}_B^I(y).$$

Πράγματι, έστω $z \in \widetilde{S}^I$. Τότε, αφού $k > 0$, $x^T Ay \geq z^T Ay \Leftrightarrow$ $x^T(kA)y + x^T \mathbf{1}\, y \geq z^T(kA)y + z^T \mathbf{1}\, y \Leftrightarrow x^T By \geq z^T By$.

Επομένως, $x \in \mathrm{BR}_A^I(x) \Leftrightarrow x \in \mathrm{BR}_B^I(x)$, που σημαίνει ότι αν η στρατηγική x ικανοποιεί τη συνθήκη α΄τάξεως στον A, τότε η x ικανοποεί τη συνθήκη α΄τάξεως και στον B (και αντιστρόφως). Επίσης, όπως παραπάνω, $x^T Ay > y^T Ay \Leftrightarrow x^T By > y^T By$. Άρα, για $y \neq x$, $y \in \mathrm{BR}_A^I(x)$ και $x^T Ay > y^T Ay$, τότε και μόνον τότε όταν $y \in \mathrm{BR}_B^I(x)$ και $x^T By > y^T By$. Δηλαδή, αν η στρατηγική x ικανοποιεί τη συνθήκη β΄τάξεως στον A, τότε η x ικανοποεί τη συνθήκη β΄τάξεως και στον B (και αντιστρόφως). Επομένως, αν η στρατηγική x είναι ΕΕΣ στον A, τότε αυτή είναι ΕΕΣ και στον B, και αντιστρόφως.

(β) Για να απαντηθεί το πρόβλημα πρέπει το δ.π.π. να τεθεί στην μορφή $B = A^T$. Αλλάζοντας τη διάταξη των στρατηγικών του II, η «μάχη των δύο φύλων» γράφεται

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Τώρα ο κάθε παίκτης ονομάζει «επιλογή 1» (πρώτη καθαρή στρατηγική) την επιλογή που αυτός προτιμά.

Γνωρίζουμε από την τάξη ότι υπάρχουν τρία ΣΣΙ. Τα δύο είναι σε καθαρές στρατηγικές (τα (κ.κ) και (τ,τ)) που στη συμμετρική μορφή γράφονται

$$x_0^1 = (1,0) \text{ vs } y_0^1 = (0,1) \quad \text{και} \quad x_0^2 = (0,1) \text{ vs } y_0^2 = (1,0)$$

Αυτά είναι και τα δύο αυστηρά (ο κάθε παίκτης έχει μοναδική βέλτιστη απάντηση στη στρατηγική του άλλου παίκτη στο ΣΣΙ), αλλά *δεν* είναι συμμετρικά (αν ήταν θα έπρεπε $x_0^k = y_0^k,\, k = 1,2$ που προφανώς δε συμβαίνει). Επομένως, παραβιάζεται η συνθήκη α΄τάξεως και οι καθαρές στρατηγικές $x_0^1 = (1,0)$ και $x_0^2 = (0,1)$ *δεν* αποτελούν ΕΕΣ. Προσέξτε ότι και στο βιβλίο (σ. 234, Παράδειγμα 6.4.1) τονίζεται ότι εάν το (x,x) αποτελεί αυστηρό ΣΣΙ στο δ.π.π. (A, A^T), τότε η στρατηγική x είναι ΕΕΣ. Δηλαδή, η αυστηρότητα του ΣΣΙ *δεν* επαρκεί για να δίνει αυτό ΕΕΣ. Απαιτείται και η συμμετρία επιπλέον. Η αυστηρότητα καλύπτει τη συνθήκη β΄ τάξης, αλλά η ισχύς της συνθήκης β΄τάξης δε φτάνει, χρειάζεται και η ισχύς της συνθήκης α΄τάξης. Δυστυχώς, όπως έδειξαν οι λύσεις που δόθηκαν στο Θέμα 2(β), το σημείο αυτό δεν είχε γίνει αντιληπτό.

Σα σχόλιο εδώ να παρατηρήσω ότι στο βιβλίο (ό.π.) αναφέρεται το εξής παράδειγμα:

«Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Τότε οι (1,0) αλλά και η (0,1) είναι στρατηγικές αυστηρών ΣΣΙ στο δ.π.π. (A, A^T) και επομένως ΕΕΣ.».

Παρατηρήστε ότι το παράδειγμα αυτό *δεν* είναι η μάχη των δύο φύλων!

Περνάμε τώρα στο ΣΣΙ σε μεικτές στρατηγικές. Από την (3) προκύπτει αμέσως ότι αυτό το ΣΣΙ δίνεται από την

$$x_0^3 = (2/3, 1/3) \text{ v.s. } y_0^3 = (2/3, 1/3)$$

Αυτό το ΣΣΙ είναι συμμετρικό, δηλαδή ικανοποιείται η συνθήκη α΄τάξης, αλλά δεν είναι αυστηρό (και μάλιστα οι στρατηγικές αυτές είναι εξισωτικές, που σημαίνει ότι αν ο *II* ακολουθεί την $(2/3, 1/3)$, τότε κάθε $(y, 1-y)$ με $y \in (0,1)$ αποτελεί β.α. του παίκτη *I*). Επομένως, η συνθήκη β΄τάξης πρέπει να ελεγχθεί αναλυτικά..

Η συνθήκη β΄τάξης γίνεται επομένως

$$(2/3, 1/3)\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} > (y, 1-y)\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} \quad \forall y \in [0,1] - \{2/3\}.$$

Κάνοντας τις γραμμοπράξεις, προκύπτει ότι η παραπάνω σχέση είναι ισοδύναμη με την

$$(3y-2)^2 > 0 \quad \forall y \in [0,1] - \{2/3\}$$

η οποία είναι προφανώς αληθής. Επομένως η $(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$ είναι ΕΕΣ στη «μάχη των δύο φύλων». Παρατηρούμε ότι το χειρότερο από όλα τα ΣΣΙ (οι πληρωμές σε αυτό κυριαρχούνται αυστηρά κατά Pareto από τις πληρωμές κάθε άλλου ΣΣΙ) δίνει τη μοναδική ΕΕΣ.

Θέμα 3 (Σχόλιο): Εφόσον δίνεται η στρατηγική κατάσταση που αποτελεί το ΣΣΙ, όλο και όλο που πρέπει να γίνει είναι να ελεγχθεί ότι εκεί κάθε παίκτης απαντά βέλτιστα στους υπόλοιπους. Πρόκειται για ιδιαίτερα εύκολη άσκηση, η οποία όμως λύθηκε από ένα μόνο φοιτητή.

Πολλοί λύτες προσέγγισαν το θέμα μέσω της τεχνικής του εδαφίου 8.3.2 (αγοραπωλησία μέσω σφραγισμένων προσφορών). Αλλά η τεχνική αυτή είναι *αναλυτική*, δηλαδή έχει χρησιμότητα όταν αναζητούμε *άγνωστο* ΣΣΙ και αποσκοπεί ακριβώς *στον εντοπισμό* αυτού του ΣΣΙ. Τέτοιες τεχνικές είναι χρήσιμες στην πραγματική έρευνα, αλλά δεν είναι αναμενόμενο να ζητηθούν σε ένα μέσης δυσκολίας διαγώνισμα και, εν πάσει περιπτώσει, είναι κενές περιεχομένου όταν θέλουμε *να ελέγξουμε* αν κάποια συγκεκριμένη στρατηγική κατάσταση αποτελεί ΣΣΙ .

Έτσι, όταν το ΣΣΙ είναι γνωστό, π.χ. έχει εντοπιστεί μέσω κάποιας αναλυτικής τεχνικής ή (πολύ ευκολότερο) δίνεται μέσω της εκφώνησης της άσκησης, το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να ελέγξουμε ότι κάθε παίκτης απαντά βέλτιστα στους υπόλοιπους. Αυτό δυστυχώς δεν έγινε αντιληπτό.

Θέμα 3 (Λύση): Για αποτιμήσεις $v_1,v_2,\dots,v_n$ και προσφορές $b_1,b_2,\dots,b_n$, η ωφέλεια του i-παίκτη θα δίνεται από την

$$u_i(b_1,\dots,b_n;v_1,\dots,v_n)=\begin{cases} v_i-b_i & \alpha\nu\ b_i>\max\limits_{t\neq i} b_t \\ (v_i-b_i)/s & \alpha\nu\ b_i=\max\limits_{t\neq i} b_t\ \&\ \acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\mu\varepsilon\ s \max \sigma\upsilon\nu o\lambda\iota\kappa\acute{\alpha} \\ 0 & \alpha\nu\ b_i<\max\limits_{t\neq i} b_t \end{cases} \qquad (1)$$

Οι προσφορές b_j, $j=1,\dots,n$, θα είναι συναρτήσεις των αποτιμήσεων των παικτών (των «τύπων» τους σύμφωνα με την ορολογία). Ας υποθέσουμε ότι όλοι οι υπόλοιποι εκτός του i-παίκτη ακολουθούν τις στρατηγικές $b_t(v_t)=\frac{n-1}{n}v_t$, $t\neq i$. Για να δείξουμε το ζητούμενο, αρκεί να δείξουμε ότι τότε η βέλτιστη απάντηση του i-παίκτη είναι επίσης η $b_i(v_i)=\frac{n-1}{n}v_i$.

Για τον i-παίκτη, τα v_j, $j\neq i$, είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές ομοιόμορφα κατανεμημένες στο (0,1). Επομένως, λόγω της απόλυτης συνέχειας της ομοιόμορφης κατανομής, για κάθε συγκεκριμένη τιμή του b_i η πιθανότητα να είναι $b_i=\max\limits_{t\neq i}\frac{n-1}{n}v_t$ είναι 0. Άρα, για τις συγκεκριμένες στρατηγικές $b_t(v_t)=\frac{n-1}{n}v_t$, $t\neq i$, η αναμενόμενη πληρωμή του i-παίκτη όπως προκύπτει από την (1), θα δίνεται από την

$$(v_i-b_i)\Pr(b_i>\tfrac{n-1}{n}v_t\ \forall t\neq i) \qquad (2)$$

Φυσικά, η πιθανότητα στον τύπο (2) ισούται με $\Pr(v_t < \frac{n}{n-1} b_i \ \forall t \neq i)$ και αυτή, λόγω της ανεξαρτησίας των v_t, θα είναι η $\prod_{\substack{t=1 \\ t\neq i}}^{n} \Pr(v_t < \frac{n}{n-1} b_i)$. Αλλά οι v_t είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στο (0,1) και επομένως, <u>*εάν*</u> $0 < \frac{n}{n-1} b_i < 1$, καταλήγουμε ότι

$$\Pr(b_i > \tfrac{n-1}{n} v_t \ \forall t \neq i) = (\tfrac{n}{n-1} b_i)^{n-1} \qquad (3)$$

Συνδυάζοντας τους τύπους (2) και (3), συμπεραίνουμε ότι ο *i*-παίκτης, προκειμένου να δώσει βέλτιστη απάντηση στις στρατηγικές των υπολοίπων, λύνει το πρόβλημα μεγιστοποίησης

$$\max_{b_i} \{(v_i - b_i)(\tfrac{n}{n-1})^{n-1} b_i^{\,n-1}\} \qquad (3)$$

Παρατηρήστε ότι αφού λύσουμε τη (3), θα πρέπει να ελέγξουμε ότι στη λύση η υπόθεση $0 < \frac{n}{n-1} b_i < 1$ ικανοποιείται.

Το πρόβλημα μεγιστοποίησης της (3) λύνεται εύκολα.. Μπορούμε π.χ. να πάρουμε λογαρίθμους (θυμηθήτε ανάλογο τρόπο μεγιστοποίησης γινομένων στη στατιστική ή στο μη γραμμικό προγραμματισμό) και να λύσουμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης της

$$g(b_i) := \ln(v_i - b_i) + (n-1)\ln\tfrac{n}{n-1} + (n-1)\ln(b_i)$$

Αφήνουμε στον αναγνώστη να ελέγξει ότι το μέγιστο της συνάρτησης $g(b_i)$ αποκτιέται για $b_i^* = \frac{n-1}{n} v_i$ και ότι ο περιορισμός $0 < \frac{n}{n-1} b_i^* < 1$ ικανοποιείται.

<u>Θέμα 4 (Σχόλιο)</u>: Το (α) μέρος απαντήθηκε από αρκετούς. Το (β) μέρος, μέχρι το σημείο με τις πολλές πράξεις, ουσιαστικά απαντήθηκε από έναν εξεταζόμενο.

<u>Θέμα 4 (Λύση)</u>: **(α)** Χρησιμοποιούμε τη θεωρία του Κεφαλαίου 9. Λόγω συμμετρίας το ίδιο δ_0^i θα δουλεύει για όλους τους παίκτες. Για να το βρούμε, χρειαζόμαστε την πληρωμή ενός παίκτη στο ΣΣΙ, στο μονοπώλιο, και τέλος στο σημείο «παρασπονδίας».

Έστω $A := a - c$. Στο ΣΣΙ, από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι κάθε παίκτης θα παράγει ποσότητα $q_0^i = \frac{A}{n+1}$ με πληρωμή $e^i = (\frac{A}{n+1})^2$. Επίσης, από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι το μονοπώλιο θα παράγει συνολικά $\frac{A}{2}$ με πληρωμή $(\frac{A}{2})^2$, και επομένως στο μονοπώλιο κάθε παίκτης θα παράγει $\hat{q}^i = \frac{A}{2n}$ με πληρωμή $x^i = \frac{1}{n}(\frac{A}{2})^2$. Ελέγχουμε ότι $e^i < x^i$ και επομένως ικανοποιούνται οι υποθέσεις του (α΄) σκέλους του θεωρήματος Friedman (Θεώρημα 9.6.1). Απομένει η εύρεση της πληρωμής ενός παίκτη αν αυτός παρασπονδίσει ενώ οι υπόλοιποι ακολουθούν στρατηγική μονοπωλίου.

Στην περίπτωση αυτή ο *i*-παίκτης επιθυμεί να μεγιστοποιήσει ως προς q^i την ποσότητα $q^i[A-(n-1)\frac{A}{2n}-q^i]$, οπότε θα παράξει $\tilde{q}^i = \frac{n+1}{4n}A$ με πληρωμή $d^i = (\frac{n+1}{4n}A)^2$.

Άρα, από το Θεώρημα θα είναι

$$\delta_0^i = \frac{d^i - x^i}{d^i - e^i} = \frac{\frac{(n+1)^2 A^2}{(4n)^2} - \frac{A^2}{4n}}{\frac{(n+1)^2 A^2}{(4n)^2} - \frac{A^2}{(n+1)^2}} = \cdots = \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2 + 4n}$$

Άρα, και $\delta_0 = \max \delta_0^i = \dfrac{(n+1)^2}{(n+1)^2 + 4n}$.

(β) Αν τώρα $0 < \delta < \delta_0$, αναζητούμε το καλύτερο αποτέλεσμα που μπορούμε να πάρουμε ως ΤΥ ΣΣΙ στο άπειρο παιχνίδι όταν χρησιμοποιούμε στρατηγικές τύπου σκανδάλης της μορφής: Να παράξεις q_*^i την 1η περίοδο και κατόπιν, κατά την *m* περίοδο, να παράξεις q_*^i εφόσον όλες τις προηγούμενες περιόδους όλοι οι παίκτες παρήγαγαν επίσης q_*^i, διαφορετικά να παράξεις $q_0^i = \frac{A}{n+1}$. Και πάλι, λόγω συμμετρίας, ό,τι ισχύει για τον *i*-παίκτη θα ισχύει για όλους. Έτσι, στο εξής παύουμε να σημειώνουμε τον δείκτη *i*.

Η πληρωμή $x(q_*)$ στο σημείο συντονισμού q_* θα δίνεται τώρα από την $x(q_*) = q_*(A - nq_*)$. Η πληρωμή *e* στο σημείο τιμωρίας θα είναι η πληρωμή στο ΣΣΙ του υποκείμενου παιχνιδιού, δηλαδή, όπως και στο (α), θα είναι $e = (\frac{A}{n+1})^2$. Η βέλτιστη ποσότητα που θα παράξει ένας παίκτης αν αποφασίσει να παρασπονδίσει θα δίνεται τώρα μέσω της μεγιστοποίησης ως προς q^i της συνάρτησης $q^i[A-(n-1)q_* - q^i]$. Αυτή είναι η ποσότητα $q_\delta^i = \frac{A-(n-1)q_*}{2}$, εφόσον βέβαια $A-(n-1)q_* \geq 0$, πράγμα που υποθέτουμε και θα ελέγξουμε στο τέλος αν ισχύει στη λύση. Επομένως, η πληρωμή στο σημείο παρασπονδίας θα δίνεται από την $d(q_*) = (\frac{A-(n-1)q_*}{2})^2$.

Όπως και στο Παράδειγμα 9.6.3, οι παίκτες θα συντονιστούν στο άπειρο παιχνίδι αν ισχύει

$$\frac{x(q_*)}{1-\delta} \geq d(q_*) + \frac{\delta}{1-\delta} e \qquad (1)$$

Αντικαθιστώντας τους παραπάνω τύπους στην (1), παίρνουμε

$$\frac{q_*(A-nq_*)}{1-\delta} \geq \left(\frac{A-(n-1)q_*}{2}\right)^2 + \frac{\delta}{1-\delta}\frac{A^2}{(n+1)^2} \qquad (2)$$

Αναζητούμε το q_* το οποίο μεγιστοποιεί την $x(q_*)$ κάτω από τον περιορισμό (2). Ένας τρόπος αντιμετώπισης είναι να αναπτύξουμε τη (2) σε τριώνυμο ως προς q_* και να μελετήσουμε το τριώνυμο αυτό ως προς το πρόσημό του. Οι πράξεις είναι θηριώδεις και προκύπτει ότι η (2) ισχύει για $q_* \in [\lambda_\delta q_0, q_0]$, όπου $q_0 = \frac{A}{n+1}$ (η ποσότητα στο ΣΣΙ του Cournot), και $\lambda_\delta = {}^{(n+1)^2 - \delta(n-1)(n+3)} \big/ {}_{(n+1)^2 - \delta(n-1)^2}$. Ελέγχουμε ότι $0 < \lambda_\delta < 1$ και ότι η $x(q_*)$ είναι φθίνουσα στο διάστημα $[\lambda_\delta q_0, q_0]$. Επομένως, το βέλτιστο $\hat{q}_*$ θα δίνεται από την $\hat{q}_* = \lambda_\delta q_0$. Ότι $A - (n-1)\hat{q}_* \geq 0$ (θυμηθήτε ότι έπρεπε να ελεγχθεί) είναι προφανές..