ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

Α’ Σετ Ασκήσεων (Παράδοση στις 9/3/2011).Υποτίθεται ότι ο φοιτητής έχει πρώτα διαβάσει το “Σχόλιο πάνω στα Στοχαστικά Παιχνίδια” στην e-class.

Άσκηση 1: Στο «Σχόλιο» αναφέρεται ότι δεδομένων των πιθανοτήτων μεταπήδησης $p_{ij}^{kr},\ r = 1, \ldots, l$, η αρχική κατάσταση του παιχνιδιού k_1 μαζί με την επιλογή συμπεριφορικών στρατηγικών (x, y) επάγουν ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}_{k_1,x,y}^{\mathrm{t}}$ πάνω στο σύνολο όλων των δυνατών ιστοριών κατά το στάδιο t, H^t. Να δειχτεί ότι

$$\mathbf{P}_{k_1,x,y}^{\mathrm{t}}(k_1, i_1, j_1, k_2, i_2, j_2, \ldots, k_{t-1}, i_{t-1}, j_{t-1}, k_t) =$$

$$= x_1(i_1|k_1)y_1(j_1|k_1)\, p_{i_1 j_1}^{k_1 k_2} x_2(i_2|k_1, i_1, j_1, k_2) y_2(j_2|k_1, i_1, j_1, k_2) p_{i_2 j_2}^{k_2 k_3} \ldots \ldots\ p_{i_{t-1} j_{t-1}}^{k_{t-1} k_t}$$

Άσκηση 2: Θεωρήστε στοχαστικό παιχνίδι με μηδενικές πιθανότητες σταματήματος σε κάθε περίπτωση (δηλ. $s_{ij}^k = 0$, για κάθε $i = 1, \ldots, m_k$, $j = 1, \ldots, n_k$, $k = 1, \ldots, l$), όπου η αναμενόμενη πληρωμή του *Ι* κατά το στάδιο t, για δοσμένο συντελεστή αποπληθωρισμού $\beta \in (0,1)$, δίνεται από την

$$h_t(k_1, x, y) = \beta^{t-1} \sum_{(k,i,j)\in H} c_{ij}^k\, \mathbf{P}_{k_1,x,y}(K_{x,y}^t = k,\ I_{x,y}^t = i,\ J_{x,y}^t = j)$$

και η συνολική πληρωμή του στο παιχνίδι δίνεται από την

$$h(k_1, x, y) = \sum_{t=1}^{\infty} h_t(k_1, x, y)$$

Να δώσετε την εκφώνηση και να αποδείξετε το αντίστοιχο του Θεωρήματος 5.2.2 (Θεώρημα Shapley) για το παραπάνω πρόβλημα. (Υπόδειξη: Δεν είναι ανάγκη να επαναλάβετε τα βήματα της απόδειξης αν «μετατρέψετε» το παραπάνω πρόβλημα, με κατάλληλο τρόπο, σε στοχαστικό παιχνίδι με θετικές πιθανότητες σταματήματος. Φυσικά, την ορθότητα της οποιασδήποτε μετατροπής θα πρέπει να την αποδείξετε).

Άσκηση 3: Να λύσετε την Άσκηση 13 του Κεφαλαίου 5.